www.sapientia.uji.es | 171

Resolución de problemas matemáticos para maestros de Educación Primaria (Método de Polya)

Manuel Alcalde Esteban
Pedro Nieves Merideño



Col·lecció «Sapientia», núm. 171

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PARA MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA (MÉTODO DE POLYA)

Manuel Alcalde Esteban
Pedro Nieves Merideño

Área de Didactica de la Matemática
Departamento de Educación y Didácticas Específicas

■ Código de la asignatura: MP1806 Didáctica de las Matemáticas



Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Colección Sapientia 171. Resolución de problemas matemáticos para maestros de educación primaria. (Método de Polya)
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Colección Sapientia 166. Resolució de problemes matemàtics per a mestres d'Educació Primària. (Mètode de Polya)
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia166

www.sapientia.uji.es
Primera edición, 2020

ISBN: 78-84-17900-59-5



Publicacions de la Universitat Jaume I es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional. www.une.es.



Este libro, de contenido científico, ha estado evaluado por personas expertas externas a la Universitat Jaume I, mediante el método denominado revisión por iguales, doble ciego.

ÍNDICE

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Prólogo

Presentamos un documento para la formación inicial y permanente de los y de las maestras de Educación Primaria, donde se muestra una propuesta didáctica para trabajar la resolución de problemas matemáticos en esta etapa educativa.

Al mismo tiempo se facilita una herramienta para propiciar o consolidar aprendizajes correspondientes a la asignatura MP1006 Didáctica de las Matemáticas I (Plan de Estudios 2010 del Grado en Maestro/a de Educación Primaria en la Universidad Jaume I) o a la asignatura MP1806 Didáctica de las Matemáticas I (de la reforma/modificación de 2018 del Plan de Estudios 2010), así como también para reforzar algunos conceptos de la publicación de Alcalde, Pérez y Lorenzo (2014) referida a números naturales (colección Sapientia, números 89 y 90, en valenciano y castellano, respectivamente), la cual es conveniente conocer para una mejor comprensión del presente texto.

Los contenidos trabajados también están en publicaciones de otros autores, pero en esta, que recoge nuestro aprendizaje y enseñanza de estos últimos años, los ofrecemos de manera unificada a los lectores y lectoras.

En el tema 1, «Introducción», tratamos el concepto de problema, qué se entiende por resolución de problemas matemáticos, su utilidad, y la resolución de problemas matemáticos en el Grado en Maestro/a de Educación Primaria en la Universitat Jaume I.

El tema 2, «El método de resolución de problemas matemáticos», contiene la explicación de nuestro método, que complementamos con un conjunto de problemas numéricos, llamados «generales» (para diferenciarlos de los que aparecen en los otros temas), y otro conjunto de problemas geométricos, para dejarlo totalmente clarificado.

Cada uno de los temas siguientes cuenta con una serie de problemas, con una probable ordenación de dificultad creciente (aunque esta puede ser subjetiva) para trabajarlos en las aulas de la Universidad con el estudiantado o en las de los centros de Educación Primaria con el alumnado, y conseguir de este modo el desarrollo de la competencia matemática de los discentes.

Los problemas están clasificados por contenidos, así, en el tercer tema, «Problemas de números naturales-Sistema de Numeración Decimal», en la resolución utilizamos la descomposición polinómica de los números.

En el tema 4, «Problemas de operaciones con números naturales», estas son el nexo de unión de ellos.

Presentamos en el tema 5, «Problemas de divisibilidad en números naturales», ejemplos donde trabajamos con los divisores, los múltiplos, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

El último tema, llamado «Otros problemas», contiene la exposición de unos problemas que tienen vinculación con las asignaturas MP1019 Didáctica de las Matemáticas II y/o MP1025 Didáctica de las Matemáticas III (Universitat Jaume I, Plan de Estudios 2010).

El objetivo del libro es proporcionar un instrumento para los y las docentes y para el estudiantado del Grado en Maestro/a, que les ayude a reflexionar sobre los hechos y sucesos que ocurren en la resolución de problemas de matemáticas en el aula escolar y les permita enfrentarse a ella desde un planteamiento que considera la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas como una tarea interdisciplinaria y globalizadora, que parte de una concepción sociocultural de la educación en general y de la educación matemática en particular.

Respecto al estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria de la Universitat Jaume I, esta obra representa un material complementario para las clases presenciales, en las que se profundiza en la didáctica de la resolución de problemas al tiempo que se relaciona con la fundamentación matemática de los conceptos y contenidos que intervienen en la resolución; además, proporcionamos un material de apoyo al estudio de la asignatura en la que se incluyen los contenidos del documento.

Convencidos de la creatividad didáctica que un o una docente debe tener en sus clases, este libro no agota las actividades de resolución de problemas matemáticos que los maestros pueden realizar en las aulas, nuestro interés es poner la atención en lo que pueden trabajar para fundamentar, didácticamente y matemáticamente, los procedimientos empleados por el alumnado y dar indicaciones de cómo pueden hacerlo.

Queremos agradecer a los compañeros y compañeras del área Didáctica de la Matemática en la Universitat Jaume I que también han participado en la impartición de la asignatura MP1006 Didáctica de las Matemáticas I durante otros cursos y, como no, en la elaboración de algún ejercicio propuesto en el documento.

Finalmente, cabe decir que este texto ha sido realizado dentro de la «Convocatoria de procedimiento selectivo para el programa de apoyo a la elaboración y publicación de materiales docentes libres para el curso 2018/19» de la Universitat Jaume I de Castellón de la Plana.

Tema 1: Introducción

1.1. Qué es un problema

Tratándose de un libro de resolución de problemas, tal vez lo primero que habría que hacer es diferenciar entre «ejercicio» y «problema» en Matemáticas. Un ejercicio es una actividad donde se aplica directamente un contenido matemático conocido para encontrar la solución. Un problema es una actividad matemática en la que para encontrar la solución, si la tiene, no se puede aplicar directamente ningún contenido matemático conocido, hay que combinar conceptos y contenidos matemáticos conocidos, relacionándolos de manera probablemente inédita, para encontrar la solución.

De manera tradicional, la utilización de la palabra «problema» dentro del aula de matemáticas coincidió más con el primer significado señalado por Webster's (1979) que con el segundo: «cualquier tipo de actividad procedimental que se realiza dentro o fuera del aula», la «definición mínima» que dice Puig (1996).

A pesar del énfasis puesto en la solución de problemas desde la década de los ochenta del siglo XX, en el aula se sigue dedicando mucho más tiempo a la resolución de ejercicios que a la resolución de problemas. No obstante, los dos tipos de tareas tienen consecuencias muy diferentes en el aprendizaje y responden a diferentes tipos de objetivos escolares. Así, los ejercicios sirven para consolidar y automatizar ciertas técnicas, destrezas y procedimientos que son necesarios para la posterior resolución de problemas, pero difícilmente pueden ayudar a que estas técnicas se utilicen en diferentes contextos de los que se han aprendido o ejercitado, o difícilmente pueden servir para el aprendizaje y comprensión de conceptos.

1.2. La resolución de problemas matemáticos

La resolución de problemas ha sido, y sigue siendo, la mayor fuente de inspiración para la obtención de nuevos conocimientos y técnicas matemáticas. En la historia de las Matemáticas determinados problemas han sido el inicio de nuevas teorías, nuevos teoremas e, incluso, han supuesto el nacimiento de nuevas ramas de la Matemática. El empeño en resolver algunos problemas ha sido fundamental para el desarrollo de la Matemática.

Hoy en día, la mayor cantidad de avances en las Matemáticas son consecuencia de los intentos de resolución de los problemas que plantea la tecnología.

La importancia de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática es reconocida por todos, y dan idea de ella expresiones como

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

«es el corazón de las matemáticas» (Halmos 1980), opiniones como «el fin de la memorización, del aprendizaje de algoritmos y de conceptos es permitir al alumnado operar con la matemática y, por tanto, resolver problemas» (Orton 1988), o manifestaciones como «el objetivo de las Matemáticas escolares debería ser que todos los alumnos estén cada vez más capacitados para resolver problemas, y deseen comprometerse en ello» (NCTM 2000, 186).

Antes de continuar convendría aclarar lo que en este contexto se entiende por «resolución de problemas matemáticos» (RPM). Quizás resulte mejor decir primero lo que no se entiende por ello. Frecuentemente, al final de cada lección o tema de un libro de texto de matemáticas se presentan una serie de ejercicios rutinarios, a los que es posible que se llame problemas, aunque no es probable que impliquen la «resolución de problemas» en el significado comúnmente aceptado. La práctica usual proporcionada por estos ejercicios es posiblemente importante y puede ser concebida como una manera de promover la memorización-automatización de los contenidos matemáticos trabajados. Algunos requerirán que el estudiantado o el alumnado aplique sus matemáticas a situaciones que surjan en el mundo real y, como tales, podríamos decir aplicaciones. Determinadas aplicaciones conllevan resolución de problemas.

La RPM se concibe normalmente como un proceso «en el que las condiciones del problema y los objetivos deseados se relacionan intencionada y sustancialmente con la estructura cognoscitiva existente» (Ausubel, Novak y Hanesian 1978, 488), proceso que permite combinar los conocimientos previos sobre conceptos, procedimientos, reglas, técnicas, destrezas, etc., para producir un conocimiento nuevo, para dar solución a una situación nueva. En otras palabras, consiste en encontrar una manera de llegar a un objetivo que no es directamente asequible.

Se la considera útil por tres razones: en primer lugar, porque se resuelven muchos problemas matemáticos en la vida diaria; en segundo lugar, porque la experiencia adquirida en la RPM es aplicable para la resolución de otros problemas no matemáticos, y en tercer lugar, porque es un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor.

Correctamente enfocada la RPM satisface ciertos requisitos del aprendizaje científico con los tres componentes que considera Kilpatrick (1985): se necesita que el estudiantado o el alumnado disponga de una información teórica, que posea un conocimiento profundo de la materia, de unos procedimientos, una serie de técnicas (estrategias) heurísticas y, finalmente, de una actitud favorable hacia la tarea y/o hacia la disciplina en cuestión que lo haga capaz de regular el proceso de resolución con respecto a la aplicación de sus conocimientos y estrategias. Es decir, la resolución de problemas conlleva la convergencia de las tres dimensiones básicas del conocimiento y su activación (Perales 2000).

Entre sus cualidades podrían incorporar también argumentos sociales, como el hecho de que el estudiantado o el alumnado puede, mediante la resolución de problemas, ir aproximando su actividad académica en la vida real, fuente de continuas «situaciones problemáticas», e incluyendo la comunicación entre individuos (cuando se afronta colectivamente) y la propia toma de decisiones, aspectos todos ellos esenciales para la integración plena del estudiantado o el alumnado en el contexto social, cultural y laboral.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Además, podría constituirse en una actividad idónea para el diagnóstico o el cambio conceptual, al precisar el contraste entre los conocimientos previos y los matemáticos, así como una actividad de gran significatividad en la evaluación de los aprendizajes, y su influencia debería lograr la mejora del currículo por parte del profesorado a partir del análisis minucioso de los resultados generados por esta evaluación.

Hay, por tanto, sobradas razones reales y potenciales para dedicar una especial atención a esta tarea, y tratar de rentabilizar estas potencialidades, promoviendo la aprehensión matemática de la realidad por parte del estudiantado o del alumnado y acercar, así, los contextos cotidiano y académico, auténtica aspiración de lo que debería ser la educación del siglo XXI.

La importancia en la resolución de la estructura cognoscitiva que posee la persona, se debe a que la solución supone la reorganización del residuo de la experiencia previa, de manera que se ajuste a los requisitos concretos de la situación problema presente. Como las ideas de la estructura cognoscitiva constituyen la materia bruta de la resolución, la transferencia que tenga lugar, positiva o negativa, reflejará la naturaleza y la influencia de las variables de la estructura cognoscitiva.

Cuando se ha resuelto un problema, se ha aprendido. Quizás concretamente solo se haya aprendido a resolver este, pero lo más probable es que se haya aprendido a solucionar una serie de ellos análogos y, quizás, incluso, otros que posean algunas características similares.

Para aprender a resolver problemas en Matemáticas el estudiantado o el alumnado debería adquirir formas de pensar, hábitos de perseverancia y curiosidad, y confianza en situaciones no familiares que les sirvieran fuera de la clase. Ser un buen resolutor proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo.

Pensar en voz alta, como auto-escucharse al hablar a otro, es una forma de hacerse consciente de los propios pensamientos, que casi siempre es una ayuda cuando se está trabajando sobre un problema (Skemp 1971).

Podemos enseñar a los y a las escolares estrategias generales para resolver problemas (uso de materiales, tanteo, elaboración de tablas, diagramas, búsqueda de regularidades, etc.); después, algunos y algunas podrán desarrollar sus métodos personales, ya que les crea confianza en sus posibilidades de hacer matemática, para asentarse sobre los saberes que ellos y ellas pueden controlar y quizás resolverán algunos problemas; pero lo importante no es que los resuelvan todos, más bien es importante que traten de resolverlos todos.

El uso de materiales manipulativos puede ayudar a los niños y las niñas a la comprensión y resolución de los problemas, ya que se favorece el proceso para realizar operaciones intelectuales, aunque sin ningún material didáctico el niño o la niña puede por sí solo llegar a ello.

No se debe obligar a los estudiantes o los alumnos a utilizar un método u otro, «más bien se instará a probar varios métodos para sacar información y así planificar la resolución» (Alsina et al. 1996, 111). A través del trabajo en grupo los profesores podemos facilitar la discusión de cuál de los métodos empleados resulta el más adecuado, analizar las estrategias, formular conjeturas, estimar resultados, delimitar errores, examinar alternativas y consecuencias, y ver la pertinencia de los resultados en relación con la situación planteada; todo ello hará que el estudiantado o el alumnado madure sus conceptos y procedimientos

y, al mismo tiempo, los inicia en las reglas sociales del debate y de la toma de decisiones.

Los problemas constituyen una novedad para quien aprende y su solución es en cierta medida un proceso creativo, que depende de que la persona no solo tenga el conocimiento y las destrezas requeridos sino también que sea capaz de utilizarlos y relacionarlos eficientemente. A veces, parece producirse un pequeño indicio, una intuición intelectual, una visión interior (*insight*), que nos lleva a la solución. Este fenómeno no entendido del todo, implica en general la comprensión de alguna relación anteriormente inadvertida dentro de la estructura del conocimiento. (Skemp 1971, Orton 1988).

Dicen estos mismos autores que esta actividad no puede realizarse por mandato, ya que la parte central es inconsciente e involuntaria. Sin embargo, parece necesario un período preliminar de concentración en el problema: dar conscientemente vueltas al problema en la mente, probar diferentes líneas de acción, aplicar métodos que pueden resultar apropiados; si aun así no llega la solución, después hay generalmente un período en el que el problema se deja de lado, al menos conscientemente. En apariencia, durante este período, continúa la actividad mental inconsciente relacionada con el problema, como si el subconsciente, libre de la exigencia consciente para resolverlo, siguiera experimentando con combinaciones de elementos del conocimiento; luego repentinamente, una intuición intelectual, relativa al problema ─quizás la solución completa─ viene a la mente en un momento en el que no se hace un trabajo deliberado sobre el problema.

Según Ausubel, Novak i Hanesian 1978, 500:

> [...] las principales fuentes de variación de la capacidad de resolver problemas son: a) conocimiento de la materia y la familiaridad con la lógica distintiva de una disciplina; b) determinantes cognoscitivos como la sensibilidad al problema, la originalidad y la curiosidad intelectual; el estilo cognoscitivo; el conocimiento general sobre la resolución eficaz del problema; el dominio de estrategias especiales de resolución de problemas dentro de las disciplinas particulares; y c) características de personalidad como la pulsión, la persistencia, la flexibilidad y la ansiedad.

Añadiendo que en determinantes como la sensibilidad al problema, la originalidad, el estilo cognitivo y los factores de personalidad, la mayor parte de la variación quizás esté en función de la dotación genética y de la experiencia acumulada; por lo que estos aspectos de la capacidad de resolución no son sensibles al adiestramiento. Por tanto, el trabajo más eficiente de instrucción en resolución de problemas se concentra en el conocimiento de la materia, en la lógica y estrategia de la resolución particulares de la disciplina y en los principios generales de la resolución valida de problemas (Ausubel 1968; Ausubel, Novak i Hanesian 1978).

1.3. La resolución de problemas matemáticos en el Grado en Maestro/a de Educación Primaria en la Universitat Jaume I

El Plan de Estudios 2010 de la Universitat Jaume I (UJI) para el Grado en Maestro/a de Educación Primaria, se iniciaba en Primer Curso la formación matemática de los futuros docentes con la asignatura MP1006 Didáctica de las

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Matemáticas I. En su programa, el tema 2 se dedicaba a la resolución de problemas, su enseñanza-aprendizaje de manera genérica para, más adelante, en los temas correspondientes a los otros contenidos de esta asignatura, abordar la resolución de problemas específicos, al igual que ocurre en las restantes asignaturas del área en el Grado, MP1019 Didáctica de las Matemáticas II en Segundo Curso y MP1025 Didáctica de las Matemáticas III en Tercero, con los problemas referentes a los contenidos de las mismas.

Entonces, la formación en RPM en el Grado en Maestro/a no era solo responsabilidad de los profesores de Didáctica de la Matemática que impartían la asignatura del Primer Curso, sino que debía ser compartida por todo el profesorado del área en esta titulación, por lo que se hacía necesaria una coordinación general en los aspectos referentes a este contenido matemático, que fuera más allá de la ya existente entre los diferentes profesores de cada una de las asignaturas.

El curso 2012/2013 el área Didáctica de la Matemática en la UJI estaba formada por profesorado con experiencia docente e investigadora en titulaciones de Maestro/a, profesorado con experiencia universitaria en otras áreas de conocimiento de Matemáticas, profesorado con experiencia en Educación Secundaria y profesorado con poca experiencia docente pero con formación en didáctica matemática adquirida en cursar el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Ante tal diversidad competencial y dado el número importante de profesorado a concertar, decidimos constituir un Seminario de Investigación Educativa «Resolución de Problemas Matemáticos» con los siguientes objetivos:

- Coordinar los contenidos de las diferentes asignaturas del área de Didáctica de la Matemática correspondientes a la RPM.
- Mejorar la formación didáctica del profesorado del área.
- Mejorar la formación inicial en RPM del estudiantado del grado.
- Ayudar al estudiantado universitario a conseguir un cambio actitudinal ante los contenidos de RPM que facilitara sus procesos de estudio y aprendizaje.
- Elaborar materiales docentes sobre RPM que puedan ser utilizados en diferentes asignaturas del área.

La plasmación inmediata de este Seminario de Investigación Educativa fue la adopción de un modelo-esquema de RPM y la comunicación «Algunas reflexiones sobre la didáctica de la Resolución de Problemas Matemáticos» presentada en las XVI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), celebradas en Palma de Mallorca en julio de 2013 (Alcalde et al. 2013), en la que la explicábamos.

Finalmente, cabe decir que la reforma/modificación de 2018 del Plan de Estudios 2010 del Grado en Maestro/a de Educación Primaria en la UJI, ha transformado la asignatura MP1006 Didáctica de las Matemáticas I en la asignatura MP1806 Didáctica de las Matemáticas I, en la que también el tema 2 se dedica a la resolución de problemas.

Tema 2. El método de resolución de problemas matemáticos

2.1. Introducción

La RPM puede tener tres funcionalidades: objetivo, contenido o metodología. Como objetivo porque la enseñanza de las Matemáticas va dirigida a que el estudiantado o el alumnado aprenda a resolver problemas; como contenido porque se refiere a técnicas, heurísticas y estrategias para conseguirla, y como metodología porque se la considera uno de los mejores caminos para aprender Matemáticas (García Jiménez 2002). En este libro la consideramos desde la segunda de las funcionalidades, como contenido, con el fin de llegar a la primera de ellas, para que el estudiantado o el alumnado aprenda a resolver problemas, y así, tratar de mejorar datos como los referidos a los futuros maestros/as de Educación Primaria de primer curso de la Universidad de Granada, proporcionados por Sánchez Mendías, Segovia y Millán 2011, 309:

> […] resulta significativo que un 80,28 % sientan preocupación por su capacidad para resolver problemas, tengan sentimientos negativos e incluso reconozcan situaciones de bloqueo ante esta actividad matemática.

En este tema presentamos nuestro método de RPM, algunas consideraciones didácticas y, a continuación, un conjunto de problemas numéricos, llamados «generales» (para diferenciarlos de los que aparecen en los otros temas) y otro conjunto de problemas geométricos, con el fin de dejar totalmente aclarado el método y mostrar ejemplos de su aplicación.

El contenido, por tanto, podría ser una gran ayuda para el trabajo del tema 2 de la asignatura MP1006 Didáctica de las Matemáticas I (UJI, Plan de Estudios 2010) y también para la asignatura MP1806 Didáctica de las Matemáticas I (reforma/modificación de 2018).

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.2. El método

Como hemos dicho en el tema 1, el curso 2012/2013 en el área Didáctica de la Matemática en la UJI constituimos un Seminario de Investigación Educativa «Resolució de Problemes Matemàtics» (SIE RPM) donde adoptamos un modelo-esquema de RPM que detallamos en la comunicación «Algunas reflexiones sobre la didáctica de la Resolución de Problemas Matemáticos» (Alcalde et al. 2013), partiendo de los siguientes puntos:

a) La concepción sobre la Didáctica de la Matemática expuesta en Pérez, Alcalde y Lorenzo 2012.
b) Los modelos de RPM descritos en Alcalde (2010): Dewey (1910), Polya (1945), Mason, Burton y Stacey (1982), Schoenfeld (1985), Puig y Cerdán (1988), y Carrillo (1998).
c) Cómo se contempla la RPM en las normas legales de los currículos de Educación Primaria y de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Pudimos comprobar que sugerían unas fases que se parecían más a las del modelo de Polya que a las de los otros.
d) Las orientaciones para la RPM que aparecen en los textos utilizados en las escuelas e institutos, por ser Educación Primaria la etapa en la que desarrollará su trabajo el estudiantado del Grado en Maestro/a, y Secundaria la etapa de su procedencia al ingresar en la universidad. Orientaciones que también sugerían unas fases en la RPM que se parecían más al de Polya que a las de los otros modelos.

En cuanto al punto *c*), hoy en día, con el Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, para la Educación Primaria, y el Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, para la Educación Secundaria, se mantienen los mismos supuestos: las estrategias/fases sugeridas para la RPM se parecen más a las del modelo de Polya que a las de los otros.

Y referente al punto d), como hemos comprobado recientemente con la tutorización de trabajos de fin de Grado en Maestro/a de Educación Primaria (GMEP) (Traver 2015, Sobrino 2016, García Granell 2017), también se mantienen los mismos supuestos: las orientaciones para la RPM en los textos se parecen más al de Polya que a las de los otros modelos.

Luego, como los puntos *a*), *b*), *c*) y *d*), son los mismos referentes hoy que en el curso 2012/2013, seguimos suscribiendo el modelo-esquema de RPM del SIE RPM del área Didáctica de la Matemática en la UJI, que pasamos a explicar a continuación, al que hemos incorporado el aprendizaje y la enseñanza desde entonces.

Nuestro método, el modelo-esquema de RPM, parte de la propuesta de Polya (Polya 1945), de sus cuatro fases, llamándolas de una forma muy similar, introduciendo algunas subfases que complementan la visión que trabajamos con el estudiantado de GMEP.

En los problemas que presentamos en los apartados 2.3 y 2.4, así como en los temas siguientes del libro, abordamos la RPM desde dos perspectivas: la de estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria, y la del alumnado de 5.º y/o 6.º de Educación Primaria, por ser esta la etapa en la que desarrollará su trabajo el estudiantado.

Estas perspectivas comportan formas de resolución generalmente distintas, pues el estudiantado de GMEP, con unos conocimientos matemáticos hasta la ESO, está capacitado con herramientas matemáticas más potentes que las del alumnado de Primaria, como, por ejemplo, una iniciación al álgebra.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Al elegir esta forma de trabajar la RPM en las aulas de la UJI pretendemos que el estudiantado pueda contemplar cada uno de los problemas desde su propio punto de vista y desde el que tendría el alumnado de Primaria. Al pensar la RPM como si fueran niños y niñas de Primaria deben hacer un trabajo reflexivo que analiza las diferentes posibilidades que el alumnado tiene a la hora de enfrentarse a un problema, lo que implicará una importante mejora en su forma de ver la RPM y un reconocimiento de las diferentes maneras de resolverlos que enriquecerá tanto su formación matemática como su preparación didáctica.

Pasamos ya a explicar el método:

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado es necesario explicitar la información del texto del problema en la subfase *A) Datos e incógnitas*. De esta manera podremos lograr una mayor conciencia de lo que tenemos, los datos, y de lo que queremos encontrar, la o las incógnitas.

En nuestras clases comprobamos que el estudiantado, a veces, empieza a resolver el problema y llega a un punto en el que no puede seguir, bien porque no sabe lo que convendría seguir haciendo, bien porque el problema no tiene solución, por este motivo pensamos que es necesaria una subfase como *B) ¿El problema es resoluble?*, que creemos que es lo que Polya (1945) trata de indicar cuando en la página 19 de la traducción española, en las preguntas o sugerencias correspondientes a la primera fase dice: «¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?».

Para que el estudiantado del Grado en Maestro/a comprenda la necesidad de formularse la pregunta de la resolubilidad del problema y tratar de responderla, de vez en cuando, les proponemos problemas irresolubles, como, por ejemplo, el A.8 o el B.13.

En esta subfase pueden haber diferencias entre la resolución del estudiantado y del alumnado de Educación Primaria, por ejemplo, en un problema en el que el futuro maestro/a traduciría los datos en un sistema de ecuaciones, vería que el problema es resoluble comprobando la resolubilidad del sistema, mientras que el/la escolar, al no saber ecuaciones, posiblemente comprobaría que el problema es resoluble mediante un tanteo, por ejemplo.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Aquí hay que explicitar los pasos que, partiendo de los datos, nos conducirán a obtener la o las incógnitas, la solución del problema. Se trata de indicar ordenadamente las acciones que, encadenadas, debemos ejecutar, pero sin hacer cálculos, solo decir qué hay que hacer.

Evidentemente, podrá haber una diferencia entre lo que expresa el estudiantado y lo que expresaría el alumnado, consecuencia lógica del mayor dominio del lenguaje de los universitarios, pero pensamos que es conveniente esta fase pues refuerza lo que perseguimos en *B) ¿El problema es resoluble?*, por si acaso la respuesta no se había hecho del todo bien.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Esta parte consiste en hacer lo que se ha dicho en la fase anterior, seguir los pasos indicados, pero ahora sí, haciendo los cálculos y todo lo que sea necesario para obtener la solución del problema.

En caso de que se haya resuelto un sistema de ecuaciones, proponemos que una vez obtenida la solución del sistema se compruebe la corrección de dicha solución, para evitar continuar con la resolución del problema y, más tarde, ver, detectar o darnos cuenta de que su solución no está bien.

Es una práctica bastante común que obtenida la solución del problema, es decir, finalizada la 3.ª fase, se dé por terminada la resolución del problema, sin plantearse la corrección del resultado, que a veces no está bien por haber cometido algún error en los cálculos, en la aplicación de algún contenido matemático, por no corresponder al contexto del problema, etc., por lo tanto, consideramos necesaria la siguiente fase con la intención de corregir esta práctica y, por lo tanto, que quien resuelve un problema se convierta en «matemático» (Chevallard, Bosch y Gascón 1997) responsable y seguro de su trabajo.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

Para examinar la solución, ver si el resultado es correcto, lo que Polya (1945) trata de indicar cuando en la página 19 de la traducción española, en las preguntas o sugerencias correspondientes a la cuarta fase dice: «¿Puede usted verificar el resultado?», lo primero que debemos plantearnos, el primer filtro, es lo que preguntamos en la subfase *A) ¿La solución es razonable?*, pues de una manera bastante intuitiva, aproximada, tratamos de detectar si la solución es pertinente.

En algunas ocasiones, será el propio contexto del enunciado del problema el que nos podrá decir si la solución es adecuada, otras veces haciendo un cálculo aproximativo, o mediante una estimación de entre qué valores podría estar la solución.

Llegados a que la solución es razonable, puede ocurrir que no sea precisa, exacta, por lo que proponemos la subfase *B) Comprobar la solución*. Una de las posibilidades es, como dice Polya (1945) justo después de la referencia anterior: «¿Puede obtener el resultado de forma diferente?», por ejemplo, un problema en el que se ha calculado la solución mediante la resolución de un sistema de ecuaciones, entonces, encontrar la solución por medio de un tanteo, o la comprobación de la solución en el estudiantado de Grado en Maestro/a podría ser resolviendo el problema como lo hace el alumnado de Educación Primaria, si es que hay diferencia entre ambas resoluciones.

A veces, ya es suficiente resolver un problema como para, además, obtener la solución de otra forma, por lo que en estos casos podemos comprobar la solución mediante el procedimiento «cambiar los datos proporcionalmente» o este otro «cambiar datos por incógnita y viceversa ». En ambos casos hay que enunciar un nuevo problema análogo al original y justo después del nuevo enunciado hay que decir cuál es la solución que lógicamente esperamos de ese nuevo problema, para que si obtuviéramos otro resultado poder detectar que o bien nos hemos equivocado en los cálculos de la nueva solución o, si no es este el caso, entonces

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

el problema original tiene una solución que no es la que estamos comprobando y, por tanto, el problema original está mal resuelto.

En cualquiera de las tres formas diferentes de comprobar la solución del problema original, la resolución que hay que hacer ahora en la 4.ª fase, no empieza nuevamente con las 1.ª y 2.ª fases del método que estamos explicando, sino que solo se hace lo que corresponde a una 3.ª fase, es decir, los cálculos necesarios para encontrar la solución que buscamos.

El procedimiento «cambiar los datos proporcionalmente» es bastante particular, por lo que hay que tener mucha precaución en su aplicación. Para empezar, en el enunciado del nuevo problema hay que cambiar los datos en la misma proporción, es decir, no se puede duplicar uno o unos datos, otro u otros dividirlos por tres, etc., hay que cambiarlos todos por igual. Además, no se tienen que cambiar las proporciones, las razones que hay entre los datos del enunciado. Por último, en los problemas geométricos hay que tener mucho cuidado con lo que ocurre según estemos trabajando en 1, 2 o 3 dimensiones, hay que razonar bien la modificación que hacemos a los datos como afectará a la incógnita del nuevo problema, es decir, si los datos son de una dimensión, por ejemplo, cómo afectarán a la incógnita si esta es de una, de dos o de tres dimensiones. En los problemas que siguen quedarán aclarados estos extremos.

La aplicación del procedimiento «cambiar datos por incógnita y viceversa» para comprobar la solución consiste en enunciar un nuevo problema análogo al original, donde la incógnita del problema original será ahora uno de los datos del nuevo enunciado y, uno o algunos de los datos del problema original desaparecen para convertirse en la incógnita o incógnitas del nuevo problema. Es como formalizar la prueba de la sustracción o de la división, pero enunciando un nuevo problema.

Por ejemplo, si al resolver una sustracción de minuendo «m» y de sustraendo «s» con resta o diferencia «d»: «m – s = d», para comprobarla, calculamos «s + d» para ver si nos da «m», entonces, si hemos resuelto un problema de datos «m» y «s» con incógnita «d», para comprobar la solución («d») enunciamos un nuevo problema de datos «s» y «d» con incógnita «m».

En el caso de la división sería: si al resolver una división de dividendo «D» y de divisor «d» con cociente «c» y resto «r»: $\begin{array}{l|l} \mathbf{D} & \mathbf{d} \\ \cline{2-2} \mathbf{r} & \mathbf{q} \end{array}$ para comprobarla, calculamos «d · c + r» para ver si nos da «D», entonces, si hemos resuelto un problema de datos «D» y «d» con incógnitas «c» y «r», para comprobar la solución («c» y «r») enunciamos un nuevo problema de datos «d», «c» y «r» con incógnita «D».

Hasta aquí la explicación de nuestro método de RPM, que confiamos quede aclarado totalmente en los problemas que, con esta intención, resolvemos en este tema.

2.3. Algunas consideraciones didácticas

Los enunciados de los problemas deben estar contextualizados en la vida y/o en los aprendizajes que están haciendo los y las discentes para que generen una mayor motivación y para que tengan un mayor interés en su resolución.

Partiremos de las ideas previas del estudiantado o del alumnado sobre cada uno de los problemas a trabajar y, en particular, de sus propuestas personales de resolución de las diferentes situaciones que se planteen, para continuar con la

búsqueda de los procedimientos generales, estándares, como forma de ofrecerles las herramientas matemáticas que se utilizan en la resolución de los problemas.

Las resoluciones presentadas son algunas de las posibles. Para no hacer excesivamente grande la publicación no hemos desarrollado las varias que pueden haber en algunos casos, pero cuando hemos aplicado una manera diferente de solucionar los problemas para el estudiantado del grado que para el alumnado de Primaria, siempre el estudiantado podría utilizar la resolución del alumnado y, en algunos casos, los y las escolares podrían hacerlo como las y los universitarios.

En nuestras clases podemos enseñar al estudiantado y al alumnado estrategias generales para resolver problemas como el uso de materiales, tanteo, elaboración de tablas, diagramas, búsqueda de regularidades, etc.

Finalmente, cabe decir que en la selección de los enunciados y la correspondiente resolución de los problemas como alumnado de Educación Primaria, hemos tenido en consideración las competencias, los contenidos, los criterios de evaluación, así como las recomendaciones de metodología didáctica, para los cursos de la etapa del Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y despliega la ordenación general de la Educación Primaria, con respecto al área de Matemáticas. Además, para mayor seguridad en la adecuación a los niveles establecidos por el decreto, algunos problemas han sido contrastados con la resolución por el alumnado de algunos centros de la provincia de Castellón.

2.4. Problemas numéricos «generales»

Problema A.1

Iolanda ha comprado un coche por 8.200 €. Lo ha pagado en tres partes: primero pagó un 60 % del valor del coche, después el 25 % y, finalmente, el resto. ¿Cuánto pagó Yolanda la última vez?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Yolanda ha comprado un coche per 8.200 €.
  - Lo ha pagado en tres partes.
  - Primero pagó un 60 % del valor del coche.

- Después pagó un 25 % del valor del coche.
- Finalmente, pagó el resto.

- Incógnitas:

  - ¿Cuánto pagó Yolanda la última vez?

B) ¿El problema es resoluble?

Si conocemos el precio del coche, 8.200 €, que lo ha pagado en tres partes y el porcentaje del precio que ha pagado en la primera y segunda partes, entonces, sabemos qué porcentaje del precio ha pagado y, por tanto, podemos calcular el porcentaje que le falta por pagar, por lo que podremos averiguar cuántos euros debía del precio del coche, que es lo que pagó la última vez.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Sumaremos los porcentajes que ha pagado en la primera y segunda partes.
b) Calcularemos el porcentaje que le falta por pagar, restando el anterior al 100 %.
c) Averiguamos cuántos euros son el porcentaje calculado de los 8.200 €, del precio del coche.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 60 % + 25 % = 85 %
b) 100 % − 85 % = 15 %
c) 15 % de 8.200 € = 0,15 · 8.200 = 1.230 €

Por lo tanto, solución: Yolanda pagó 1.230 € la última vez.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es una cantidad inferior al precio del coche y, como había pagado un poco menos del 90 % en las dos partes, debía una cantidad mayor del 10 % del precio del coche, una cantidad mayor que 820 €, como es la que pagó Yolanda la última vez.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, utilizamos el método «cambio de dato por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

cuánto pagó Yolanda la última vez, 1.230 € (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos el porcentaje del total que había pagado en la primera parte (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*Yolanda ha comprado un coche por 8.200 €. Lo ha pagado en tres partes. Pagó el 25 % en la segunda parte y 1.230 € la última vez. ¿Qué porcentaje pagó Yolanda en la primera parte?*». Esperamos que la respuesta sea el 60 %.

Hacemos los cálculos necesarios:

Si la última vez ha pagado 1.230 €, tenemos que del total es 1.230 : 8.200 = = 0,15, que expresado en porcentaje sería el 15 %.

Por lo tanto, entre la segunda y la tercera parte ha pagado 25 % + 15 % = = 40 %.

Entonces, en la primera parte ha pagado 100 % − 40 % = 60 %, como esperábamos, por lo tanto, la solución obtenida creemos que es correcta.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Yolanda ha comprado un coche per 8.200 €.
  - Lo ha pagado en tres partes.
  - Primero pagó un 60 % del valor del coche.
  - Después pagó un 25 % del valor del coche.
  - Finalmente, pagó el resto.
- Incógnitas:
  - ¿Cuánto pagó Yolanda la última vez?

B) ¿El problema es resoluble?

Si conocemos el precio del coche, 8.200 €, que lo ha pagado en tres partes y el porcentaje del precio que ha pagado en la primera y segunda partes, entonces, sabemos qué porcentaje del precio ha pagado y, por tanto, podemos calcular el porcentaje que le falta por pagar, por lo que podremos averiguar cuántos euros debía del precio del coche, que es lo que pagó la última vez.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Calcularemos cuántos euros ha pagado en la primera parte.
b) Calcularemos cuántos euros ha pagado en la segunda parte.
c) Sumaremos cuántos euros ha pagado en la primera y segunda partes.
d) Restaremos la cantidad anterior al precio del coche para saber lo que pagó la tercera y última vez.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 60 % de 8.200 = (60 : 100) · 8.200 = 0,6 · 8.200 = 4.920 €
b) 25 % de 8.200 = (25 : 100) · 8.200 = 0,25 · 8.200 = 2.050 €
c) 4.920 + 2.050 = 6.970 €
d) 8.200 – 6.970 = 1.230 €

Por lo tanto, solución: Yolanda pagó 1.230 € la última vez.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es una cantidad inferior al precio del coche y, como había pagado un poco menos del 90 % en las dos partes, debía una cantidad mayor del 10 % del precio del coche, una cantidad mayor que 820 €, como es la que pagó Yolanda la última vez.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, utilizamos el método «resolver el problema de otra manera», por porcentajes en lugar de mediante las cantidades de euros. Esperamos que la respuesta sea igualmente 1.230 €.

Hacemos los cálculos necesarios:

Sumamos los porcentajes que ha pagado en la primera y segunda partes: 60 % + 25 % = 85 %.

Calculamos el porcentaje que le falta por pagar: 100 % – 85 % = 15 %.

Averiguamos cuantos euros son el porcentaje calculado de los 8.200 €, del precio del coche: 15 % de 8.200 € = (15 : 100) · 8.200 = 0,15 · 8.200 = 1.230 €.

Como esperábamos, por lo tanto, creemos que la solución obtenida es correcta.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Problema A.2

De los 25 alumnos de la clase de 6.º de Primaria, el 40 % de ellos/as se quedan en el comedor. Ayer solo tomaron postres el 60 % de los/las que se quedan. ¿Cuántos/as alumnos/as de 6.º que van al comedor no tomaron postres ayer?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - 25 alumnos de la clase de 6.º de Primaria.
  - El 40 % de ellos/as se quedan en el comedor.
  - Ayer solo tomaron postres el 60 % de los/las que se quedan.
- Incógnitas:
  - ¿Cuántos/as alumnos/as de 6.º que van al comedor no tomaron postres ayer?

B) ¿El problema es resoluble?

Sabemos cuántos/as alumnos/as hay en 6.º de Primaria, 25, como el 40 % de ellos/as se quedan en el comedor, sabemos cuántos/as comen en el colegio, pero tomaron postres solo el 60 %, por lo tanto, podemos saber cuántos/as comieron postres ayer, entonces, el resto de los/las alumnos/as de 6.º que se quedan en el comedor son los/las que no tomaron postres ayer, con lo cual el problema es resoluble

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Calcularemos el 40 % de 25 para saber cuántos/as alumnos/as de 6.º de Primaria se quedan en el comedor.
b) De estos calcularemos el 60 %, que son los/las que tomaron postres.
c) Por lo que para calcular los/las alumnos/as de 6.º que se quedan en el comedor y no tomaron postres ayer, del número obtenido en el 1.er paso restaremos el obtenido en el 2.º paso.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 40 % de 25 = (40 : 100) · 25 = 0,4 · 25 = 10 alumnos/as de 6.º se quedan en el comedor.
b) 60 % de 10 = (60 : 100) · 10 = 0,6 · 10 = 6 alumnos/as de 6.º que se quedan en el comedor tomaron postres ayer.
c) 10 – 6 = 4 alumnos/as.

Solución: 4 alumnos/as de 6.º que van al comedor no tomaron postres ayer.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es una cantidad inferior a la que se queda en el comedor y, también, porque no todos/as comieron postres.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, utilizamos el método «cambio de dato por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos cuántos alumnos no tomaron postres (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos el porcentaje de alumnos de 6.º que se quedan en el comedor y tomaron postres ayer (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*De los 25 alumnos de la clase de 6.º de Primaria, el 40 % de ellos/as se quedan en el comedor. Ayer 4 no tomaron postres. ¿Qué porcentaje de alumnos de 6.º que se quedan en el comedor tomaron postres ayer?*». Esperamos que la respuesta sea el 60 %.

Hacemos los cálculos necesarios:

a) 40 % de 25 = (40 : 100) · 25 = 0,4 · 25 = 10 alumnos/as de 6.º se quedan en el comedor.
b) 10 – 4 = 6 alumnos/as de 6.º que se quedan en el comedor tomaron postres ayer.
c) 6 alumnos/as de 10 es la misma proporción que 60 de 100, por tanto, el 60 % de alumnos/as de 6.º que se quedan en el comedor tomaron postres ayer.

Por lo tanto, creemos que la solución obtenida es correcta.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución podría ser la misma que la del estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria, tal vez la diferencia podría estar en:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, utilizamos el método «resolverlo de otra manera».

Calculamos cuántos alumnos de la clase de 6.º de Primaria se quedan en el comedor: 40 % de 25 = (40 : 100) · 25 = 0,4 · 25 = 10 alumnos/as.

Si el 60 % tomó postre, entonces, no tomó postre: 100 % – 60 % = 40 %.

Por tanto, el número de alumnos de la clase de 6.º de Primaria que se quedan en el comedor y no toman postre son: 40 % de 10 = (40 : 100) · 10 = = 0,4 · 10 = 4 alumnos/as.

Que coincide con la solución obtenida en la 3.ª fase, por lo que creemos que el problema está bien resuelto.

Problema A.3

Siete amigos fueron a un restaurante y cada uno pidió un menú. Había dos tipos de menú para elegir, el menú tipo A costaba 8 euros, el menú tipo B costaba 11 euros y pagaron un total de 65 euros. ¿Cuántos menús de cada tipo pidieron?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Siete amigos fueron a un restaurante y cada uno pidió un menú.
  - Había dos tipos de menú para elegir, el menú tipo A costaba 8 euros, el menú tipo B costaba 11 euros y pagaron un total de 65 euros.
- Incógnitas:
  - Cuántos menús de cada tipo pidieron.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «x» al número de menús de tipo A e «y» al número de menús de tipo B, siendo «x» e «y» números naturales, los datos del enunciado los podemos traducir en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 8 \cdot x + 11 \cdot y = 65 \end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 8 \cdot x + 11 \cdot y = 65 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -8x - 8\,y = -56 \\ \;8x + 11y = 65 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -8x - 8y = -56 \\ 3y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 3y = 9 \end{array}\right\}$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «y» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 8x + 11y = 65 \end{array}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 3y = 9 \end{array}\right\}$.

De la ecuación $3y = 9$, obtenemos $y = 3$.
Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: $x + 3 = 7 \rightarrow x = 7 - 3 = 4$.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 8 \cdot x + 11 \cdot y = 65 \end{array}\right\}$ está bien resuelto:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 4 + 3 = 7 \\ 8x + 11y = 8 \cdot 4 + 11 \cdot 3 = 32 + 33 = 65 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, el sistema está bien resuelto y la solución del problema es la siguiente: pidieron 4 menús tipo A y 3 menús tipo B.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un total de 7 menús.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la cantidad de menús de cada tipo pedidos (eran incógnitas y pasan a ser datos en el nuevo problema) y calcularemos cuánto se pagaría por la comida (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*¿Cuánto se pagaría por la comida de siete amigos si han pedido 4 menús de 8 euros y 3 menús de 11 euros?*». Esperamos que el resultado sea 65 €.

Hacemos los cálculos:

Como han pedido 4 menús de 8 euros pagarán 8 · 4 = 32 € y como han pedido 3 menús de 11 euros pagarán 11 · 3 = 33 €.

Luego pagarían en total 32 + 33 = 65 €; como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Siete amigos fueron a un restaurante y cada uno pidió un menú.
  - Había dos tipos de menú para elegir, el menú tipo A costaba 8 euros, el menú tipo B costaba 11 euros y pagaron un total de 65 euros.
- Incógnitas:
  - Cuántos menús de cada tipo pidieron.

B) ¿El problema es resoluble?

Veámoslo por tanteo.

Si dividimos el total pagado entre el número de amigos vemos que da aproximadamente 9 €, como la media del precio está más próxima de 8 € (precio del menú tipo A) que de 11 € (precio del menú tipo B) podemos suponer que se pidieron más menús de tipo A que de tipo B y sabemos que se piden un total de 7 menús, por tanto, recogiendo las pruebas en una tabla:

Número de menús de tipo A	Número de menús de tipo B	Precio de todos los menús tipo	Precio de todos los menús tipo B	¿Precio total = = 65 €?
7	0	56	0	56 → NO
6	1	48	11	59 → NO
5	2	40	22	62 → NO

Vemos que, tal y como disminuimos el número de menús tipo A y aumentamos el número de menús tipo B, el precio total se aproxima a 65 €, luego posiblemente el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo.

3.ª FASE: EJECUTAR UN PLAN

Número de menús de tipo A	Número de menús de tipo B	Precio de todos los menús tipo A	Precio de todos los menús tipo B	¿Precio total = = 65 €?
5	2	40	22	62 → NO
4	3	32	33	65 → SÍ
3	4	24	44	68 → NO

Encontramos que 4 menús tipo A y 3 menús tipo B es solución.

Vemos también en la tabla que si el número de menús tipo A sigue disminuyendo y el número de menús tipo B sigue aumentando, el precio total de la comida aumenta, por lo que hay solo una solución: entre los 7 amigos pidieron 4 menús tipo A y 3 menús tipo B.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un total de 7 menús.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿Siete amigos fueron a un restaurante y cada uno pidió un menú? 4 menús de tipo A y 3 menús de tipo B: 4 + 3 = 7 menús. Sí.
- ¿Había dos tipos de menú para elegir, el menú tipo A costaba 8 euros, el menú tipo B costaba 11 euros y pagaron un total de 65 euros? Por los 4 menús de tipo A pagaron: 8 · 4 = 32 €, y, por los 3 menús de tipo B: 11 · 3 = 33 €, por lo que, en total, pagaron: 32 + 33 = 65 €.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema A.4

Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25, para cruzar una calle por el paso de cebra. Si un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana ¿cuánto mide el paso de cada una?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25, para cruzar una calle por el paso de cebra.
  - Un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana.
- Incógnitas:
  - Cuánto mide el paso de cada una.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) ¿El problema es resoluble?

Como Ana y su madre caminan el mismo trozo, el paso de cebra, el producto de la longitud del paso de cada una por el número de pasos que da cada una tiene que ser igual. Por tanto, si llamamos «A» a la longitud del paso de Ana y «M» a la longitud del paso de su madre, entonces tendremos: $A \cdot 35 = M \cdot 25$.

Como un paso de la madre es 20 cm más largo que un paso de Ana, tendremos que $M = A + 20$.

Es decir, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\left\{\begin{matrix} A \cdot 35 = M \cdot 25 \\ A + 20 = M \end{matrix}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} A \cdot 35 = M \cdot 25 \\ A + 20 = M \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 35A - 25M = 0 \\ A - M = -20 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 35A - 25M = 0 \\ -35A + 35M = 700 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 35A - 25M = 0 \\ 10M = 700 \end{matrix}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que es resoluble y, por tanto, posiblemente, el problema también.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema anterior.

3.ª FASE: EJECUTAR UN PLAN

$$\left\{\begin{matrix} A \cdot 35 = M \cdot 25 \\ A + 20 = M \end{matrix}\right\} \rightarrow 35A = (A + 20) \cdot 25 \rightarrow 35A = 25A + 20 \cdot 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 35A - 25A = 20 \cdot 25 \rightarrow 10A = 500 \rightarrow A = 500 : 10 = 50.$$

$$A + 20 = M \rightarrow M = 50 + 20 = 70.$$

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} A \cdot 35 = M \cdot 25 \\ A + 20 = M \end{matrix}\right\}$ está bien resuelto:

$$\left\{\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} A \cdot 35 = 50 \cdot 35 = 1.750 \\ M \cdot 25 = 70 \cdot 25 = 1.750 \end{matrix}\right\} \\ A + 20 = 50 + 20 = 70 = M \end{matrix}\right\}.$$

Por lo tanto, el sistema está bien resuelto y la solución del problema es la siguiente: longitud del paso de Ana, 50 cm, y longitud del paso de su madre, 70 cm.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que son medidas posibles para el paso de personas.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la longitud del paso de Ana (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos cuánto mide más el paso de la madre que el de Ana (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25, para cruzar una calle por el paso de cebra. Si un paso de Ana mide 50 cm ¿cuánto mide más el paso de su madre?*». Esperamos que la respuesta sea 20 cm más.

Hacemos los cálculos:

Como no sabemos cuánto mide el paso de la madre de Ana, tendremos que empezar calculándolo.

La longitud del paso de Ana es de 50 cm, por tanto, el paso de cebra tiene $50 \cdot 35 = 1.750$ cm.

Como su madre da 25 pasos para cruzarlo, $25 \cdot M = 1.750$ cm, entonces, $M = 1.750 : 25 = 70$ cm.

La diferencia entre la longitud del paso de la madre de Ana y la del paso de Ana es: $M - A = 70 - 50 = 20$ cm.

Como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer resolviendo un sistema de ecuaciones.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25, para cruzar una calle por el paso de cebra.
  - Un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana.
- Incógnitas:
  - Cuánto mide el paso de cada una.

B) ¿El problema es resoluble?

Como Ana y su madre caminan el mismo trozo, el paso de cebra, el producto de la longitud del paso de cada una por el número de pasos que da cada una tiene que ser igual.

Como el paso de la madre es 20 cm más largo que el de Ana, teniendo además en cuenta el párrafo anterior, haremos pruebas para ver si el problema es resoluble.

Recogemos las pruebas en una tabla y como no sabemos la longitud del paso de Ana empezamos el tanteo suponiendo, por ejemplo, que tiene un paso de 20 cm:

Medida paso de Ana (cm)	Medida paso madre: 20 + el de Ana (cm)	Longitud caminada por Ana en 35 pasos (cm)	Longitud caminada por su madre en 25 pasos (cm)	Igualdad longitudes caminadas
20	20 + 20 = 40	20 · 35 = 700	40 · 25 = = 1.000	NO
30	20 + 30 = 50	30 · 35 = 1.050	50 · 25 = = 1.250	NO
40	20 + 40 = 60	40 · 35 = 1.400	60 · 25 = = 1.500	NO

Podemos ver en la tabla que a medida que crece la longitud del paso de Ana, la diferencia entre la distancia recorrida por su madre y por ella, en los 25 y 35 pasos, respectivamente, va disminuyendo, por lo que pensamos que habrá una longitud del paso de Ana en el que la distancia recorrida por su madre y por ella, será la misma, es decir, que el problema será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos tanteando para encontrar la solución.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Como habíamos llegado a medida del paso de Ana 40 cm, seguimos en 50 cm.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Longitud paso de Ana (cm)	Longitud paso madre: 20 + el de Ana (cm)	Longitud caminada por Ana en 35 pasos (cm)	Longitud caminada por su madre en 25 pasos (cm)	Igualdad longitudes caminadas
50	20 + 50 = 70	50 · 35 = 1.750	70 · 25 = 1.750	SÍ
60	20 + 60 = 80	60 · 35 = 2.100	80 · 25 = 2.000	NO
70	20 + 70 = 90	70 · 35 = 2.450	90 · 25 = 2.250	NO

Encontramos que 50 cm de medida del paso de Ana y 70 cm del de su madre es solución.

Vemos también en la tabla que, si la longitud de los pasos siguiera creciendo, la distancia recorrida por ella y su madre, en los 35 y 25 pasos, respectivamente, sería cada vez más diferente, por lo que hay solo una solución: 50 cm de longitud el paso de Ana y 70 cm el de su madre.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que son medidas posibles para el paso de personas.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución verifica los datos del enunciado del problema:

- ¿Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25, para cruzar una calle por el paso de cebra? Ana camina 35 · 50 = 1.750 cm y su madre 25 · 70 = 1.750 cm. Por tanto, la distancia que caminan madre e hija es la misma.
- ¿Un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana? 70 – 50 = = 20 cm. Sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema A.5

Ana tiene cinco años más que su hermano Fernando. Cuando pasen seis años, entre las edades de los dos hermanos igualarán a la del padre, que en la actualidad tiene 41 años. ¿Qué edad tienen actualmente los dos hijos?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Ana tiene cinco años más que su hermano Fernando.
  - Cuando pasen seis años, entre las edades de los dos hermanos igualarán a la del padre, que en la actualidad tiene 41 años.

- Incógnitas:
  - Edad que tienen actualmente los dos hijos.

B) ¿El problema es resoluble?

Llamamos «A» a la edad de Ana y «F» a la edad de su hermano Fernando, siendo A y F números naturales.

Entonces tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

$$\left\{\begin{array}{l} A = F + 5 \\ (A + 6) + (F + 6) = 41 + 6 \end{array}\right\}.$$

Procedemos a triangulizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} A = F + 5 \\ (A + 6) + (F + 6) = 41 + 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = F + 5 \\ A + F + 12 = 47 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - F = 5 \\ A + F = 35 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - F = 5 \\ 2A = 40 \end{array}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que es resoluble y, como A será un número natural, por lo tanto, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema anterior.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

$$\left\{\begin{array}{l} A = F + 5 \\ (A + 6) + (F + 6) = 41 + 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = F + 5 \\ A + F + 12 = 47 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - F = 5 \\ A + F = 35 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - F = 5 \\ 2A = 40 \end{array}\right\} \rightarrow A = 40 : 2 = 20.$$

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

$20 = F + 5 \rightarrow F = 20 - 5 = 15.$

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} A = F + 5 \\ (A + 6) + (F + 6) = 41 + 6 \end{matrix}\right\}$ està ben resolt:

$\left\{\begin{matrix} A = 20;\ F + 5 = 15 + 5 = 20 \\ (A + 6) + (F + 6) = (20 + 6) + (15 + 6) = 26 + 21 = 47 \end{matrix}\right\}.$

Por lo tanto, el sistema está bien resuelto y la solución del problema es la siguiente: edad de Ana, 20 años, y edad de Fernando, 15 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que son valores posibles para las edades de hijos de un padre de 41 años.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la edad de Ana (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos cuántos años más tiene Ana que su hermano Fernando (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Ana tiene 20 años y su padre 41. Cuando pasen seis años, entre las edades de los dos hermanos, Ana y Fernando, igualarán a la del padre. Sabiendo que Ana es mayor que Fernando, ¿cuántos años más tiene Ana que Fernando?*». Esperamos que la respuesta sea 5 años más.

Hacemos los cálculos:

Como no sabemos cuál es la edad de Fernando, tendremos que empezar por calcularla.

Dentro de 6 años Ana tendrá 20 + 6 = 26, Fernando (F + 6) años y su padre 41 + 6 = 47 años, luego 26 + (F + 6) = 47, ecuación que resolvemos:

$26 + (F + 6) = 47 \rightarrow 26 + F + 6 = 47 \rightarrow F + 32 = 47 \rightarrow F = 47 - 32 = 15.$

La diferencia entre la edad de Ana y la de Fernando es: A – F = 20 – 15 = = 5 años.

Como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer resolviendo un sistema de ecuaciones.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Ana tiene cinco años más que su hermano Fernando.
  - Cuando pasen seis años, entre las edades de los dos hermanos igualarán a la del padre, que en la actualidad tiene 41 años.
- Incógnitas:
  - Edad que tienen actualmente los dos hijos.

B) ¿El problema es resoluble?

Como Ana tiene 5 años más que su hermano Fernando daremos valores a la edad actual de Fernando, y completaremos una tabla hasta encontrar dos edades cuya suma dentro de 6 años sea la edad que tendrá el padre: 41 + 6 = 47 años.

Edad en la actualidad		Edad dentro de 6 años		
Fernando	*Ana*	*Fernando*	*Ana*	*¿Fernando + Ana = 47?*
5	10	11	16	11 + 16 = 27 → NO
6	11	12	17	12 + 17 = 29 → NO
8	13	14	19	14 + 19 = 33 → NO
10	15	16	21	16 + 21 = 37 → NO

Podemos ver en la tabla que a medida que aumenta la edad de Fernando, la suma de las edades de los hermanos dentro de 6 años se aproxima a 47, por lo que pensamos que habrá una edad de Fernando para la que la suma de las edades de Fernando y de Ana dentro de 6 años sea la edad que tendrá el padre, 47 años, es decir, posiblemente, el problema será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos tanteando para encontrar la solución.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Como habíamos llegado a la edad de Fernando de 10 años, seguimos en 11 años.

Edad en la actualidad		Edad dentro de 6 años		
Fernando	*Ana*	*Fernando*	*Ana*	*¿Fernando + Ana = 47?*
11	16	17	22	17 + 22 = 39 → NO
13	18	19	24	19 + 24 = 43 → NO
15	20	21	26	21 + 26 = 47 → SÍ
17	22	23	28	23 + 28 = 51 → NO

Encontramos que la edad de Ana, 20 años, y la edad de su hermano Fernando, 15 años, es solución.

Vemos también en la tabla que si la edad de Fernando siguiera aumentando, la suma de su edad y la de Ana dentro de 6 años seguiría aumentando y no volvería a dar 47, por lo que hay solo una solución: edad de Ana, 20 años, y edad de Fernando, 15 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que son valores posibles para las edades de hijos de un padre de 41 años.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿Ana tiene cinco años más que su hermano Fernando? 20 – 15 = 5 años. Sí.
- ¿Cuando pasen seis años, entre las edades de los dos hermanos igualarán a la del padre, que en la actualidad tiene 41 años? Dentro de seis años, Ana tendrá 20 + 6 = 26 años, su hermano Fernando 15 + 6 = 21 años, y su padre 41 + 6 = 47 años. La suma de las edades de Ana y Fernando será: 26 + 21 = 47 años, que es la edad que tendrá su padre. Sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema A.6

Compramos 100 kg de café por 485 euros. Tostarlos, que cuesta 95 euros, produce una pérdida del 20 % de su peso. Si vendemos todo el café tostado, ¿a qué precio deberemos vender el kilogramo de café para obtener un beneficio del 12 %?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Compramos 100 kg de café por 485 euros.
  - Tostar el café cuesta 95 euros.
  - En el tueste se pierde un 20 % del peso del café.
  - Con la venta de todo el café queremos obtener un beneficio del 12 %.
- Incógnitas:
  - Precio de venta del kilogramo de café.

B) ¿El problema es resoluble?

Con los dos primeros datos podemos calcular cuánto nos ha costado comprar y tostar el café. Como el precio de compra y tueste son el 100 % y queremos obtener un beneficio del 12 % con la venta de todo el café, tenemos que calcular el 112 % del precio de compra y tueste, que será el precio por el que queremos vender todo el café.

En el tueste se pierde un 20 % del peso del café, por lo que podemos calcular el 80 % del peso del café comprado para obtener el peso del café tostado.

Finalmente, calcularemos el precio de venta del kilogramo de café dividiendo el precio de venta de todo el café entre los kilos de café tostado que tenemos.

Por lo tanto, el problema es resoluble.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Sumamos lo que nos ha costado el café y lo que hemos pagado por el tueste.
b) Como el precio de compra y tueste son el 100 % y queremos obtener un beneficio del 12 % con la venta de todo el café, calculamos el 112 % del precio de compra y tueste, que será el precio por el que queremos vender todo el café.
c) Calculamos el 80 % del peso del café, ya que el 20 % se pierde en el tueste, y así obtendremos el peso del café que nos queda después del tueste.
d) Dividimos la cantidad obtenida en el apartado *b*) entre la obtenida en el apartado *c*), y así obtendremos el precio de venta del kilo de café para obtener el beneficio del 12 %.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 485 + 95 = 580 €
b) 112 % de 580 = 1,12 · 580 = 649,60 €
c) 80 % de 100 = 0,8 · 100 = 80 kg
d) 649,60 : 80 = 8,12 €/kg

Para obtener un beneficio del 12 % tendremos que vender el café a 8,12 €/kg.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que la solución obtenida es un precio razonable para un kilo de café de calidad media.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos el precio de venta del kilogramo de café (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la cantidad de kilos de café que compramos (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Compramos una determinada cantidad de kilos de café por 485 euros. Tostarlos cuesta 95 euros, produciéndose una pérdida del 20 % de su peso. Si vendemos todo el café tostado a 8,12 €/kg obtenemos un beneficio del 12 %, ¿cuál es la cantidad de kilogramos de café que compramos?*». Esperamos que la respuesta sea 100 kg de café.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hacemos simplemente los cálculos:

Sea «y» la cantidad de café (en kg) que compramos al principio.

Sea «x» la cantidad de café (en kg) que vendemos.

485 + 95 = 580 € es el coste de comprar y tostar todo el café.

112 % de 580 = 1,12 · 580 = 649,60 € es el precio por el que vendemos todo el café tostado.

8,12 €/kg es el precio al que vendemos el café, por lo tanto, 8,12 · x = 649,60 → → x = 649,60 : 8,12 = 80 kg de café tostado.

Como al tostarlo se pierde un 20 % del peso, se aprovecha un 80 %, entonces, «80 % de y» debe ser 80 kg, 80 % de y = 80 → 0,8 · y = 80 → y = 80 : 0,8 = 100.

Por lo tanto, compramos 100 kg de café; como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Compramos 100 kg de café por 485 euros.
  - Tostar el café cuesta 95 euros.
  - En el tueste se pierde un 20 % del peso del café.
  - Con la venta de todo el café queremos obtener un beneficio de un 12 %.
- Incógnitas:
  - Precio de venta del kilogramo de café.

B) ¿El problema es resoluble?

Con los dos primeros datos podemos calcular cuánto nos ha costado comprar y tostar el café. Como queremos obtener un beneficio del 12 % con la venta de todo el café, podemos calcular el 12 % del precio de compra y tueste, y sumárselo al precio de compra y tueste, que será el precio de venta de todo el café.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Del mismo modo, podemos calcular el 20 % del peso del café comprado y restárselo a los 100 kg comprados, para así obtener el peso del café tostado.

Finalmente, calcularemos el precio de venta del kilo de café dividiendo el precio de venta de todo el café entre los kilos de café tostado que tenemos.

Por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Sumamos lo que nos ha costado el café y lo que hemos pagado por el tueste.
b) Calculamos el 12 % de la suma obtenida en el apartado *a*), y se lo sumamos a la suma obtenida en el apartado *a*).
c) Calculamos el 20 % del peso del café y se lo restamos a los kilos comprados.
d) Dividimos la cantidad obtenida en el apartado *b*) entre la obtenida en el apartado *c*).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 485 + 95 = 580 € es el coste de comprar y tostar todo el café.
b) 12 % de 580 € = (12 : 100) · 580 = 69,60 € → 580 + 69,60 = 649,60 €.
c) 20 % de 100 kg = (20 : 100) · 100 = 20 kg → 100 – 20 = 80 kg de café tostado.
d) 649,60 : 80 = 8,12 €/kg.

Solución: para obtener un beneficio del 12 % tendremos que vender el café a 8,12 €/kg.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que la solución obtenida es un precio razonable para un kilo de café de calidad media.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, utilizamos el método «resolverlo de otra manera», por porcentajes en lugar de mediante las cantidades de euros. Esperamos que la respuesta sea igualmente 8,12 €/kg.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hacemos los cálculos necesarios:

Sumamos lo que nos ha costado el café y lo que hemos pagado por el tueste: 485 + 95 = 580 €, y así obtenemos el coste para su venta.

El precio de compra y tueste es el 100 % del coste para la venta y queremos obtener un beneficio del 12 % con la venta, para obtener por cuanto queremos vender todo el café, sumamos 100 % + 12 % = 112 %, y calculamos el 112 % del coste, que será 112 % de 580 = 1,12 · 580 = 649,60 €.

Se pierde el 20 % del peso en el tueste, luego tenemos el 100 % – 20 % = 80 % del peso del café para vender, y habíamos comprado 100 kg, por tanto: 80 % de 100 = 0,8 · 100 = 80 kg es la cantidad de café que venderemos.

Para calcular el precio de venta del kilo dividiremos la cantidad que hemos obtenido como precio de venta de todo el café, 649,60 €, entre los kilos que nos quedan después de tostarlo, 80 kg, y se obtendrán 649,60 : 80 = 8,12 €/kg.

Que coincide con la solución obtenida en la 3.ª fase, por lo que creemos que el problema está bien resuelto.

Problema A.7

Dos vecinas se encuentran en la escalera y una le pregunta a la otra cuántos años tienen sus nietos, a lo que le responde: «José tiene el doble de edad que Raúl, y Laura tres años más que José. La suma de las tres edades es 38 años». La vecina se quedó perpleja, ya que no sabía que la otra fue profesora de Matemáticas. ¿Cuál es la edad de cada uno de los nietos?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - José tiene el doble de edad que Raúl.
  - Laura tiene tres años más que José.
  - La suma de las tres edades es 38.

- Incógnitas:
  - Cuál es la edad de cada uno.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «J» a la edad de José, «R» a la de Raúl y «L» a la de Laura, siendo J, R y L números naturales, entonces tenemos que los datos se traducen en el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{cases} J = 2 \cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{cases}\right\}.$$

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left.\begin{cases} J = 2 \cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} J - 2R = 0 \\ -J + L = 3 \\ -J - R - L = -38 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} J - 2R = 0 \\ -2R + L = 3 \\ -3R - L = -38 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} J - 2R = 0 \\ -2R + L = 3 \\ -5R = -35 \end{cases}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como R será un número natural, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema.

3.ª FASE: EXECUTAR EL PLAN

El sistema $\left.\begin{cases} J = 2 \cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{cases}\right\}$ al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left.\begin{cases} J - 2R = 0 \\ -2R + L = 3 \\ -5R = -35 \end{cases}\right\}$.

De la ecuación $-5R = -35$, obtenemos $R = 7$.
Entonces, sustituyendo en las otras dos ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} J - 2 \cdot 7 = 0 \\ -2 \cdot 7 + L = 3 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} J = 2 \cdot 7 = 14 \\ L = 3 + 2 \cdot 7 = 17 \end{cases}\right\}.$$

Comprobamos que el sistema $\left.\begin{cases} J = 2 \cdot R \\ L = 3 + J \\ J + R + L = 38 \end{cases}\right\}$ está bien resuelto:

$$\left.\begin{cases} J = 14;\ 2 \cdot R = 2 \cdot 7 = 14 \\ L = 17;\ 3 + J = 3 + 14 = 17 \\ J + R + L = 14 + 7 + 17 = 38 \end{cases}\right\}.$$

Efectivamente, el sistema está bien resuelto, por tanto, la solución es la siguiente: edad de José, 14 años; edad de Raúl, 7 años, y edad de Laura, 17 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí, porque son números naturales correspondientes a la edad de tres personas jóvenes que son nietos.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la edad de Laura (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la suma de las edades (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*Dos vecinas se encuentran en el escalera y una le pregunta a la otra cuántos años tienen sus nietos, a lo que le responde: "José tiene el doble de edad que Raúl, y Laura tiene 17 años, tres años más que José". La vecina se quedó perpleja, ya que no sabía que la otra fue profesora de matemáticas. ¿Cuál es la suma de las edades?*». Esperamos que la suma de las edades sea 38 años.

Hacemos los cálculos necesarios:

Laura tiene tres años más que José, luego: $17 = J + 3 \rightarrow J = 17 - 3 = 14$ años.

José tiene el doble de edad que Raúl, entonces: $14 = 2 \cdot R \rightarrow R = 14 : 2 = 7$ años.

La suma de las edades de los tres hermanos será: $J + R + L = 14 + 7 + 17 = 38$ años; como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer resolviendo un sistema de ecuaciones.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - José tiene el doble de edad que Raúl.
  - Laura tiene tres años más que José.
  - La suma de las tres edades es 38.

- Incógnitas:
  - Cuál es la edad de cada uno.

B) ¿El problema es resoluble?

Haremos pruebas con edades que satisfagan las condiciones de la relación de edades entre cada dos personas y miraremos si la suma puede dar 38 años.

Para tener una referencia de qué edades podrían tener, como la suma de las tres edades es 38, de entrada, consideraremos un número cuyo triple se aproxime a 38 (por lo de «tres edades»), por ejemplo, el 13, pues $13 \cdot 3 = 39$.

Como la relación de las edades viene dada a partir de la edad de José, es de esta de la que partiremos.

La edad de José es doble que la de Raúl, es decir, la edad de José es un número par, como el número cuyo triple se aproxima a 38 es 13, que es impar, consideramos que la edad de José es 12 años, por lo que la de Raúl sería $12 : 2 = 6$ años y, entonces, la de Laura $12 + 3 = 15$ años.

La suma de las tres edades sería $12 + 6 + 15 = 33$ años, que es menos que 38 años.

Entonces estas edades, 12, 6 y 15 años no son solución, por lo que como la edad de José tiene que ser un número par, consideramos ahora que José tiene más edad, 14 años.

Si la edad de José fuera 14 años, la de Raúl sería $14 : 2 = 7$ años y la de Laura $14 + 3 = 17$ años.

La suma de las tres edades sería, por tanto, $14 + 7 + 17 = 38$ años, como queríamos, entonces el problema es resoluble y, además, estas edades son una solución del problema.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Para ver si hay más soluciones seguiremos haciendo pruebas con edades que satisfagan las condiciones de la relación de edades entre cada dos personas y miraremos si la suma da 38 años.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Si la edad de José es 12 años, la suma de las tres edades es menos que 38 años, así que no probaremos con una edad menor.

La edad de José debe ser un número par, como ya hemos probado con 14 años, probaremos ahora con 16 años, por lo que la de Raúl sería $16 : 2 = 8$ años y la de Laura $16 + 3 = 19$ años.

La suma de las tres edades será $16 + 8 + 19 = 43$ años, que es más que 38 años.

Por lo tanto, no vale la pena continuar probando con edades de José mayores de 14 años, porque la suma de las tres edades seguirá siendo mayor que 38 años,

por lo que creemos que podemos afirmar que hay solo una solución que cumpla las condiciones del enunciado, la que hemos encontrado: José 14 años, Raúl 7 años y Laura 17 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí, porque como hemos dicho en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?* las edades tienen que ser valores que estén alrededor de 13, aunque modificados por algunas de las otras condiciones, como es el caso, y, además, son edades propias de personas que son nietos.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución verifica los datos del enunciado del problema:

- ¿José tiene el doble de edad que Raúl? $14 = 7 \cdot 2$, entonces, sí.
- ¿Laura tiene tres años más que José? $17 – 14 = 3$, por tanto, sí.
- ¿La suma de las tres edades es 38 años? $14 + 7 + 17 = 38$, pues sí.

Como vemos que se verifican los datos del problema, creemos que está bien resuelto.

Problema A.8

En una caja de la Secretaría del Departamento de Educación hay 82 bolígrafos azules, rojos y negros. El número de bolígrafos azules es el doble que el de negros y el de color rojo es igual a la tercera parte de los negros. Queremos pedir una remesa igual para dotar a cada una de las secretarias de la UJI. Calcula la cantidad de bolígrafos de cada color que debemos pedir para cada secretaria.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - En total hay 82 bolígrafos entre azules, rojos y negros.
  - El número de bolígrafos azules es el doble que el de negros.
  - El número de color rojo es igual a la tercera parte de los negros.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Incógnitas:
  - Cantidad de bolígrafos que hay de cada color.

B) ¿El problema es resoluble?

Llamamos «A» al número de bolígrafos azules, «N» al número de bolígrafos negros y «R» al número de bolígrafos rojos, siendo A, N y R números naturales, entonces los datos del problema se traducen en el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas $\left\{\begin{array}{l} A = 2\cdot N \\ R = \frac{1}{3}\cdot N \\ A + N + R = 82 \end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} A = 2\cdot N \\ R = \frac{1}{3}\cdot N \\ A + N + R = 82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 2N \\ N = 3R \\ A + N + R = 82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - 2N = 0 \\ N - 3R = 0 \\ A + N + R = 82 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - 2N = 0 \\ N - 3R = 0 \\ -3N - R = -82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - 2N = 0 \\ 3N - 9R = 0 \\ -3N - R = -82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - 2N = 0 \\ 3N - 9R = 0 \\ -10R = -82 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - 2N = 0 \\ N - 3R = 0 \\ 10R = 82 \end{array}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble.

Vemos que R, que tiene que ser un número natural, multiplicado por 10 debe dar 82, y no existe ningún número natural que al multiplicarlo por 10 dé 82. Por tanto, el problema es irresoluble.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - En total hay 82 bolígrafos entre azules, rojos y negros.
  - El número de bolígrafos azules es el doble que el de negros.
  - El número de color rojo es igual a la tercera parte de los negros.
- Incógnitas:
  - Cantidad de bolígrafos que hay de cada color.

B) ¿El problema es resoluble?

Haremos pruebas con el número de bolígrafos de cada color que satisfagan las condiciones de la relación de cantidades entre cada dos colores y miraremos si la suma puede dar 82 bolígrafos, siendo, evidentemente, la cantidad de bolígrafos de cada color un número natural.

Ponemos estas pruebas en una tabla.

Como el número de bolígrafos de color rojo es igual a la tercera parte de los negros, de bolígrafos negros debería haber el triple que de rojos: de las dos maneras equivalentes de expresar la relación entre los bolígrafos rojos y negros, es más fácil y cómoda la multiplicativa, por lo que será la que usaremos, luego si partimos de una cantidad de rojos (1, 2, 3…) sabremos cuántos negros habrá y como el número de bolígrafos azules es doble que el de negros, dada una cantidad de bolígrafos rojos sabremos cuántos negros debería haber y cuántos bolígrafos azules debería haber también, por tanto, empezamos la tabla por la cantidad de bolígrafos rojos y las cantidades de los demás colores las calculamos a partir de ellos.

Rojos	Negros	Azules	Suma
1	3	6	10
2	6	12	20
3	9	18	30
…	…	…	…
8	24	48	80
9	27	54	90

Vemos que la suma de bolígrafos rojos, negros y azules en las proporciones del enunciado siempre es un múltiplo de 10. Por tanto, como la cantidad de bolígrafos de cada color tiene que ser un número natural, la suma nunca podrá ser 82. Es decir, el problema es irresoluble.

2.5. Problemas de geometría plana

Problema B.1

En una mesa circular de 1 m y 20 cm de ancho, ponemos dos tapetes circulares, lo más grandes posible, del mismo tamaño, tangentes entre ellos y con el borde de la mesa. Calcula cuánta superficie de la mesa queda sin cubrir.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

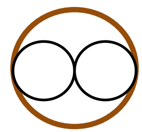
1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Una mesa circular de 1 m y 20 cm de ancho.
  - Dos tapetes circulares, lo más grandes posible, del mismo tamaño, tangentes entre ellos y con el borde de la mesa.

Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:

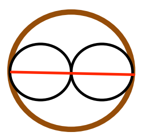


- Incógnitas:
  - Cuánta superficie de la mesa queda sin cubrir.

B) ¿El problema es resoluble?

Como conocemos la medida del diámetro del círculo de la mesa, con dimensiones reales o a escala 1:10, por ejemplo, con un compás o programas de geometría dinámica, podemos dibujar la circunferencia que limita el círculo, el borde de la mesa.

Como los tapetes son circulares, lo más grandes posible, del mismo tamaño, tangentes entre ellos y con el borde de la mesa, la suma de sus diámetros, correspondientes al punto de tangencia entre ellos y los puntos de tangencia con el borde de la mesa, tienen la misma medida que el diámetro de la mesa, como podemos ver en la figura. Por lo tanto, la medida del diámetro de cada tapete es la mitad de la medida del diámetro del círculo de la mesa, con lo que podemos dibujar análogamente el borde de los tapetes.



Mediante centímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados, podríamos medir la superficie del círculo de la mesa que no cubren los tapetes, por tanto, el problema es resoluble.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como conocemos la medida del diámetro del círculo de la mesa, 1 m y 20 cm, calculamos el radio, que denominaremos «R».
b) Calculamos el área del círculo de la mesa, que llamaremos «A_M».
c) Por lo explicado en *B) ¿El problema es resoluble?*, la medida del radio de los tapetes, que llamaremos «r», es la mitad de la medida del radio del círculo de la mesa, luego haremos el cálculo.
d) Calculamos el área del círculo de los tapetes, que llamaremos «A_t».
e) Finalmente, restaremos al área del círculo de la mesa el doble del área del círculo de los tapetes, con lo que obtendremos la medida de la superficie del círculo de la mesa que no cubren los tapetes, que llamaremos «A».

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $R = 1{,}20 : 2 = 0{,}60$ m
b) $A_M = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0{,}60^2 = 1{,}1304$ m^2
c) $r = R : 2 = 0{,}60 : 2 = 0{,}30$ m
d) $A_t = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}30^2 = 0{,}2826$ m^2
e) $A = A_M - 2 \cdot A_t = 1{,}1304 - 2 \cdot 0{,}2826 = 0{,}5652$ m^2

Solución: 0,5652 m^2 es la cantidad de superficie del círculo de la mesa que no cubren los tapetes.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí, porque como podemos ver en el dibujo alusivo al enunciado del problema, la superficie del círculo de la mesa que no cubren los tapetes, como mínimo, es tanta como un tapete.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, reduciremos los datos a la mitad, es decir, consideramos el nuevo problema: «*En una mesa circular de 0,60 m de ancho, ponemos dos tapetes circulares, lo más grandes posible, del mismo tamaño, tangentes entre ellos y con el borde de la mesa. Calcula cuánta superficie de mesa queda sin cubrir*». Hemos reducido a la mitad una medida de longitud, de una magnitud lineal, y la incógnita es la medida de una superficie, de una magnitud cuadrática, esperamos por tanto, que la nueva solución sea la cuarta parte de la solución inicial: $A = 0{,}5652 : 4 = 0{,}1413$ m^2.

Hacemos los cálculos necesarios:

a) $R = 0,60 : 2 = 0,30$ m
b) $A_M = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0,30^2 = 0,2826$ m^2
c) $r = R : 2 = 0,30 : 2 = 0,15$ m
d) $A_t = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0,15^2 = 0,07065$ m^2
e) $A = A_M - 2 \cdot A_t = 0,2826 - 2 \cdot 0,07065 = 0,1413$ m^2

Como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente la misma, pues los conceptos y contenidos utilizados son propios de los últimos cursos de Educación Primaria y la diferencia podría ser:

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:10, por ejemplo, mediríamos la superficie del círculo de la mesa que no cubren los tapetes mediante centímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados, y obtendríamos una medida muy aproximada a 56,52 cm^2, que al «deshacer la escala» son los 0,5652 m^2 solución del problema en la 3.ª fase, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.2

Un castillo con forma de rectángulo de 100 m de ancho y doble de largo, está defendido por un batallón de soldados cuyos fusiles tienen un alcance de 100 m. Determina la longitud del contorno de la zona protegida por los soldados y el área de dicha zona.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

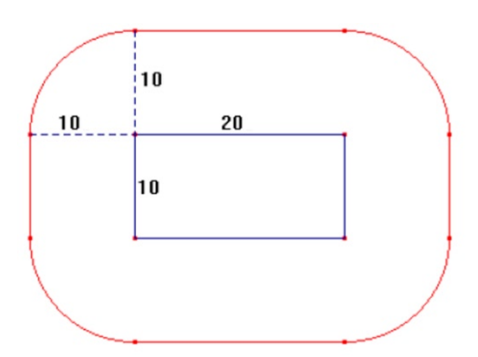
- Datos:
  - Un castillo con forma de rectángulo de 100 m de ancho y doble de largo.
  - El castillo está defendido por un batallón de soldados cuyos fusiles tienen un alcance de 100 m.

- Incógnitas:
  - Longitud del contorno de la zona protegida por los soldados.
  - Área de la zona protegida.

B) ¿El problema es resoluble?

Podemos construir/dibujar el rectángulo del castillo mediante programas de geometría dinámica o a escala.

Por ejemplo, cada 10 m en la realidad será 1 cm en el plano, escala 1:1.000, es decir, el rectángulo tendrá 10 cm de ancho y 20 cm de largo y, del mismo modo, los fusiles de los soldados tendrán un alcance de 10 cm. Cortamos un trozo de cuerda de 10 cm de longitud, atamos un lápiz en uno de los extremos y, poniendo el otro extremo sobre el borde del castillo y manteniendo la cuerda tensa y perpendicular a los lados del castillo, recorremos el borde, marcando así con el lápiz el contorno de la zona bajo el control de los soldados.

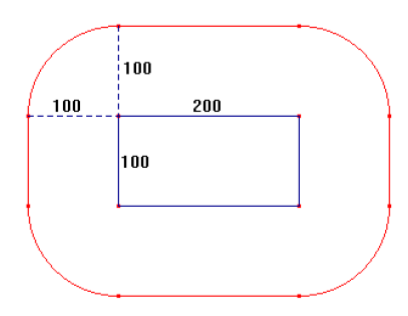


Una vez marcado el contorno de la zona bajo el control de los soldados, podemos medirlo, aproximadamente, superponiendo un cordón, que luego mediremos, y la superficie, el área de la zona bajo el control de los soldados, que podemos recubrir con decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados, que contaremos. Por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Con la ayuda del dibujo alusivo:

a) El contorno del territorio bajo control de los soldados es la línea roja del dibujo, formada por dos segmentos de 200 m, en la parte superior e inferior, respectivamente, dos segmentos de 100 m, en la parte izquierda y derecha, respectivamente, y por los cuatro cuartos de circunferencia, de 100 m de radio, que se forman en las esquinas del recinto fortificado. Por lo tanto, para calcular la medida del contorno del territorio bajo control de los soldados, el perímetro «P», debemos sumar las medidas de todas las líneas que lo forman.



b) Como vemos en el dibujo, tenemos el rectángulo del recinto del castillo (con dimensiones de 100 m de ancho y 200 m de largo) y se forman, en la parte superior e inferior del mismo, otros dos rectángulos iguales. A la medida de la superficie de todos los rectángulos la llamaremos «A_1» y para obtenerla calculamos el área del rectángulo del recinto del castillo, que llamaremos «A_R», y la multiplicaremos por 3.

c) A la derecha e izquierda del recinto del castillo se forman dos cuadrados de dimensiones 100 m de lado. A la medida de la superficie de los dos cuadrados la llamaremos «A_2» y para obtenerla calculamos el área de uno de estos cuadrados, que llamaremos «A_C», y la multiplicaremos por 2.

d) En cada vértice del recinto del castillo se forma un cuarto de círculo de radio de 100 m, que, como son cuatro los vértices, completarán un círculo, por lo que calculamos el área de un círculo de radio de 100 m, que llamaremos «A_3».

e) La superficie bajo el control de los soldados está compuesta por las superficies descritas en los tres puntos anteriores. Si sumamos las tres áreas anteriores tendremos la medida de la superficie bajo el control de los soldados, que llamaremos «A_T». Así calculamos $A_T = A_1 + A_2 + A_3$.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $P = 2 \cdot 200 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot \pi \cdot 100 = 400 + 200 + 628{,}32 = 1.228{,}32$ m

b) $A_R = 200 \cdot 100 = 20.000\ m^2 \rightarrow A_1 = 3 \cdot 20.000 = 60.000\ m^2$

c) $A_Q = 100^2 = 10.000\ m^2 \rightarrow A_2 = 2 \cdot 10.000 = 20.000\ m^2$

d) $A_3 = \pi \cdot 100^2 = \pi \cdot 10.000 = 31.415{,}93\ m^2$

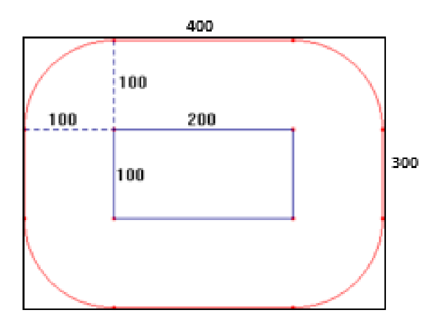
e) $A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 60.000 + 20.000 + 31.415{,}93 = 111.415{,}93 \rightarrow$
$\rightarrow A_T = 111.415{,}93\ m^2$

Solución: longitud del contorno del territorio bajo control de los soldados: 1.228,32 m; área del territorio bajo control de los soldados: 111.415,93 m^2.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Si ampliamos el ancho y el largo del recinto del castillo en 100 m en cada extremo, obtenemos un rectángulo de 300 m de ancho y 400 m de largo, más grande que la zona bajo control, como podemos ver en el dibujo.



El perímetro de la zona bajo control de los soldados, 1.228,32 m, es mayor que el perímetro del recinto del castillo, 600 m, y menor que la del rectángulo de dimensiones 400 m de largo y 300 m de ancho, 1.400 m.

También, del dibujo anterior, podemos deducir que el área de la zona bajo control de los soldados, 111.415,93 m^2, es mayor que el área del recinto del castillo, 20.000 m^2, y menor que la del rectángulo de dimensiones 300 m de ancho y 400 m de largo, 120.000 m^2.

Por tanto, las soluciones son razonables.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución del problema es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», por lo tanto, elegimos la de duplicar los datos, por lo que el nuevo problema es: «*Un castillo con forma de rectángulo de 200 m de ancho y doble de largo, está defendido por un batallón de soldados cuyos fusiles tienen un alcance de 200 m. Determina la longitud del contorno de la zona protegida por los soldados y el área de dicha zona*». Como hemos duplicado medidas de longitud, de una magnitud lineal, la incógnita «longitud del contorno de la zona protegida por los soldados», la medida de una longitud, de una magnitud lineal, esperamos, por tanto, que la nueva solución sea dos veces la solución inicial: 2 · 1.228,32 m = 2.456,64 m; y la incógnita «área de la zona protegida por los soldados», la medida de una superficie, de una magnitud cuadrática, esperamos, por tanto, que la nueva solución sea cuatro veces la solución inicial: 4 · 111.415,93 m^2 = 445.663,72 m^2.

Hacemos simplemente los cálculos:

a) = $2 \cdot 400 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot \pi \cdot 200 = 800 + 400 + 1.256,64 = 2.456,64$ m
b) $A_R = 400 \cdot 100 = 80.000\ m^2 \rightarrow A_1 = 3 \cdot 80.000 = 240.000\ m^2$
c) $A_C = 200^2 = 40.000\ m^2 \rightarrow A_2 = 2 \cdot 40.000 = 80.000\ m^2$
d) $A_3 = \pi \cdot 200^2 = \pi \cdot 40.000 = 125.663,71\ m^2$
e) $A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 240.000 + 80.000 + 125.663,71 = 445.663,71 \rightarrow$
$\rightarrow A_T = 445.663,71\ m^2$

Ambas nuevas soluciones coinciden con las estimaciones realizadas, por lo tanto, creemos que la solución del problema es correcta.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente igual, ya que los conceptos y contenidos utilizados son propios de los últimos cursos de la Educación Primaria y la diferencia podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:1.000, por ejemplo, mediríamos la longitud del contorno de la zona bajo el control de los soldados, por ejemplo, con un cordón, y obtendríamos una medida muy aproximada a 122,8 cm, que al «deshacer la escala» serían 1.228 m que aproximadamente son los 1.228,32 m solución del problema.

Análogamente, mediremos la superficie, el área de la zona bajo el control de los soldados, que podemos recubrir con decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados, que contamos, y obtendremos 1.114,2 cm^2, que al «deshacer la escala» serían 111.420 m^2, que aproximadamente son los 111.415,93 m^2 solución del problema.

Por lo tanto, creemos que la solución del problema es correcta.

Problema B.3

En el diseño de la tapa circular de un bote se ha pensado inscribir una etiqueta cuadrada. Si la tapa tiene 10 centímetros de diámetro, se quiere calcular el área de la parte superior de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta, para pintar solo ese trozo.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

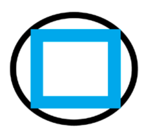
❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La tapa tiene forma de círculo y su diámetro es 10 centímetros.
  - La etiqueta es cuadrada y está inscrita en el círculo.

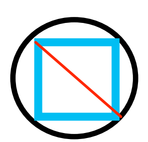
Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo: 

- Incógnitas:
  - El área de la parte superior de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta.

B) ¿El problema es resoluble?

Al conocer el diámetro de la parte superior de la tapa, del círculo, o de la circunferencia que lo limita, conocemos el radio, por lo que podemos dibujarla.

Como se aprecia en el dibujo, el diámetro de la circunferencia es la diagonal del cuadrado inscrito, entonces, podemos dibujar el contorno del cuadrado, mediante un cartabón o un goniómetro, o programas de geometría dinámica, trazando segmentos que formen 45° con el diámetro.



Al tener físicamente la circunferencia y el contorno del cuadrado inscrito podemos medir la superficie del recinto que queda entre una y el otro, mediante centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados (de papel, de tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados, por lo que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Para calcular el área de la superficie de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta, que llamaremos «A», tendremos que calcular el área del círculo que es la parte superior de la tapa y restarle el área del cuadrado inscrito que es la etiqueta, por lo que haremos los siguientes cálculos:

a) Como conocemos la medida del diámetro de la tapa, la llamaremos «d», al dividir por dos tenemos la medida del radio, que llamaremos «r».
b) Obtenemos el área del círculo, que llamaremos «A_{Ci}».
c) Para calcular el área del cuadrado inscrito necesitamos la medida del lado del cuadrado, que llamaremos «c». El diámetro del círculo es la diagonal del cuadrado inscrito, diagonal que como apreciamos en el dibujo forma un triángulo rectángulo con dos lados, podemos aplicar el teorema de Pitágoras, pues los dos lados del cuadrado son iguales, entonces, en la igualdad del teorema tenemos un dato, la medida de la hipotenusa, la diagonal, y una incógnita, la medida del lado.
d) Obtenemos el área del cuadrado, que llamaremos «A_{Cu}».
e) Restamos al área del círculo el área del cuadrado inscrito.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $d = 10$ cm $\rightarrow r = d : 2 = 10 : 2 = 5$ cm
b) $A_{Ci} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5$ cm^2
c) $d^2 = c^2 + c^2 \rightarrow d^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 10^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 100 = 2 \cdot c^2 \rightarrow$
$\rightarrow c^2 = 100 : 2 = 50$ cm$^2 \rightarrow c = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm
d) $A_{Cu} = c^2 = 7{,}07^2 = 50$ cm^2
e) $A = A_{Cu} - A_{Cu} = 78{,}5 - 50 = 28{,}5$ cm^2

Solución: el área de la parte superior de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta es de 28,5 cm^2.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues como vemos en el dibujo alusivo, la superficie de la parte superior de la tapa, el círculo, es mayor que la de la etiqueta, el cuadrado inscrito, como nos ha salido en la fase de antes.

B) Comprobar la solución

Para validar la solución aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, duplicaremos el dato numérico, es decir,

consideramos el nuevo problema: «*En el diseño de la tapa circular de un bote se ha pensado inscribir una etiqueta cuadrada. Si la tapa tiene 20 centímetros de diámetro, se quiere conocer el área de la parte superior de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta, para pintar solo ese trozo*». Hemos duplicado una medida de longitud, de una magnitud lineal, y la incógnita es la medida de una superficie, de una magnitud cuadrática, esperamos, por tanto, que la nueva solución sea cuatro veces la solución inicial: $A = 28{,}5 \cdot 4 = 114\ cm^2$.

Hacemos los nuevos cálculos.

a) $d = 20\ cm \rightarrow r = d : 2 = 20 : 2 = 10\ cm$
b) $A_{Ci} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 314\ cm^2$
c) $d^2 = c^2 + c^2 \rightarrow d^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 20^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow 400 = 2 \cdot c^2 \rightarrow$
$\rightarrow c^2 = 400 : 2 = 200\ cm^2 \rightarrow c = \sqrt{200} = 14{,}14\ cm$
d) $A_{Cu} = c^2 = 14{,}14^2 = 200\ cm^2$
e) $A = A_{Ci} - A_{Cu} = 314 - 200 = 114\ cm^2$

Vemos que el resultado es el esperado, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Según el Decreto 108/2014 que establece el currículo de Educación Primaria, en el 3.er curso de Educación Primaria, en el bloque 3: Dibujo geométrico, del área Educación Artística, encontramos el contenido «Construcción de polígonos a partir del lado y del radio de la circunferencia», lo que permite la construcción de algunos polígonos regulares, concepto de «polígonos regulares» que aparece en el 4.º curso de Educación Primaria en el bloque 4: Geometría, del área de Matemáticas, según el mismo decreto.

Ambas referencias justifican que los conceptos «polígono inscrito en una circunferencia o en un círculo» y el de «circunferencia circunscrita o círculo circunscrito a un polígono», deben figurar entre los conocimientos del alumnado del 5.º y 6.º curso de Educación Primaria.

Consideramos que, según el Decreto 108/2014, en el 6.º curso de Educación Primaria, en el bloque 4: Geometría, del área de Matemáticas, por el contenido «Regularidad y simetrías: reconocimiento de regularidades», criterio de evaluación BL4.2 «Calcular el área y el perímetro de cualquier figura plana (en entornos naturales, artísticos, arquitectónicos, etc.) utilizando diversas estrategias (fórmulas, descomposición, etc.) para explicar el mundo que nos rodea», se puede enseñar el teorema de Pitágoras en este curso, como así hacen algunos y algunas maestras, y aplicarlo para calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidas las medidas de los catetos ($h^2 = a^2 + b^2$), lo que hemos aplicado en la resolución de este problema y algunos otros.

Por tanto, creemos que el problema puede plantearse en 6.º curso de Educación Primaria.

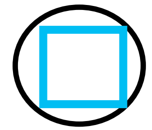
1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La tapa tiene forma de círculo y su diámetro es 10 centímetros.
  - La etiqueta es cuadrada y está inscrita en el círculo.

Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:

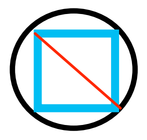


- Incógnitas:
  - El área de la parte superior de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta.

B) ¿El problema es resoluble?

Al conocer el diámetro de la parte superior de la tapa, del círculo, o de la circunferencia que lo limita, conocemos el radio, por lo que podemos dibujar la circunferencia.

Como se aprecia en el dibujo, el diámetro de la circunferencia es la diagonal del cuadrado inscrito, entonces, podemos dibujar el contorno del cuadrado, mediante un cartabón o un goniómetro, o programas de geometría dinámica, trazando segmentos que formen 45° con el diámetro.



Al tener físicamente la circunferencia y el contorno del cuadrado inscrito podemos medir la superficie del recinto que queda entre una y el otro, mediante centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados (de papel, de tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados, por lo que creemos que el problema es resoluble.

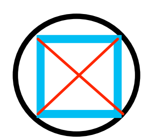
2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Para calcular el área de la superficie de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta, que llamaremos «A», tendremos que calcular el área del círculo que es la

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

parte superior de la tapa y restarle el área del cuadrado inscrito que es la etiqueta, por lo que haremos los siguientes cálculos:

a) Como conocemos la medida del diámetro de la tapa, la llamaremos «d», al dividir por dos tenemos la medida del radio, la llamaremos «r».
b) Obtenemos el área del círculo, que llamaremos «A_{Ci}».
c) Para calcular el área del cuadrado inscrito necesitamos la medida del lado del cuadrado, que llamaremos «c». Como apreciamos en el dibujo, dos radios del círculo forman un triángulo rectángulo con un lado del cuadrado, podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la medida del lado.



d) Obtenemos el área del cuadrado, que llamaremos «A_{Cu}».
e) Restamos al área del círculo el área del cuadrado inscrito.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $d = 10$ cm $\rightarrow r = d : 2 = 10 : 2 = 5$ cm
b) $A_{Ci} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5$ cm^2
c) $r^2 + r^2 = c^2 \rightarrow 5^2 + 5^2 = c^2 \rightarrow 25 + 25 = c^2 \rightarrow c^2 = 50$ cm^2 $\rightarrow$
$\rightarrow c = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm
d) $A_{Cu} = c^2 = 7{,}07^2 = 50$ cm^2
e) $A = A_{Ci} - A_{Cu} = 78{,}5 - 50 = 28{,}5$ cm^2

Solución: el área de la parte superior de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta es de 28,5 cm^2.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues como vemos en el dibujo alusivo, la superficie de la parte superior de la tapa, el círculo, es mayor que la de la etiqueta, el cuadrado inscrito, como nos ha salido en la fase de antes.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema, mediríamos la superficie de la parte superior de la tapa que queda sin cubrir por la etiqueta mediante centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados, y conseguiríamos una medida muy aproximada a 28,5 cm^2, solución del problema obtenida en la 3.ª fase, por lo que pensamos que el problema está bien resuelto.

Problema B.4

En un restaurante, para la cena de Nochevieja, han preparado una mesa circular de 1 metro de radio poniéndole un mantel cuadrado, que centrado en la mesa es tangente al borde de esta. Calcula la medida de la diagonal del mantel.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

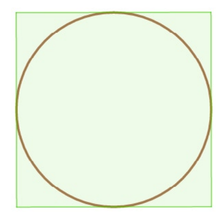
1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El radio de la mesa circular es de 1 metro.
  - El mantel, es cuadrado y tangente al borde de la mesa.

Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:



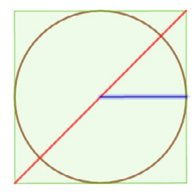
- Incógnitas:
  - La medida de la diagonal del mantel.

B) ¿El problema es resoluble?

Podemos construir o hacer el dibujo alusivo mediante programas de geometría dinámica o a escala.

Si, por ejemplo, elegimos la escala 1:10, 10 cm en el dibujo equivaldrán a 1 m en la realidad.

Entonces, con un compás o con una cuerda y un lápiz, con un radio de 10 cm, podemos dibujar la circunferencia que es el borde de la mesa y mediante una regla y una escuadra o un cartabón el contorno del cuadrado, tangente al círculo que es la mesa.

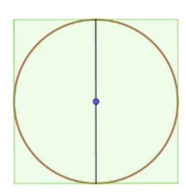


Luego, podremos medir la diagonal del cuadrado, por lo tanto, el problema es resoluble.

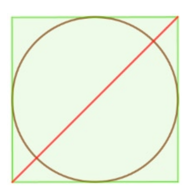
2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

A partir del dibujo alusivo:

a) Vemos que el diámetro del círculo, que es el doble del radio, tiene la misma longitud que el lado del cuadrado (lo llamaremos «c»), luego sabemos las dimensiones del mantel.



b) Por el teorema de Pitágoras, podemos calcular la medida de la diagonal del mantel cuadrado (la llamaremos «d»), ya que dos lados consecutivos del cuadrado y la diagonal del cuadrado que une los extremos, no comunes, de estos lados, forman un triángulo rectángulo, del cual conocemos los dos catetos (lados del cuadrado) y desconocemos la hipotenusa (diagonal del cuadrado).



3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $r = 1$ m $\rightarrow c = 2 \cdot r = 2$ m
b) Utilizamos el t. de Pitágoras: $d^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow d = \sqrt{8} = 2{,}82$ m.

Por lo tanto, la solución es la siguiente: la diagonal del mantel mide 2,82 m.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

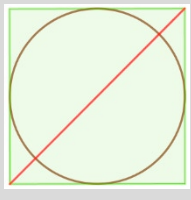
La medida de la diagonal es mayor que la del lado del cuadrado y menor que la suma de las dimensiones de dos lados, por tanto, es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la longitud de la diagonal del mantel (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos cuánto mide el radio de la mesa (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En un restaurante, para la cena de Nochevieja, han preparado una mesa circular poniéndole un mantel cuadrado que, centrado en la mesa, es tangente al borde de la misma y que tiene por diagonal 2,82 m. ¿Cuál es la medida del radio de la mesa?*». Esperamos que el resultado sea 1 m.

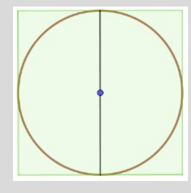
Hacemos los cálculos:

Por el teorema de Pitágoras, podemos calcular la medida del lado del mantel (la llamaremos «c»), ya que dos lados consecutivos del cuadrado y la diagonal del cuadrado que une los extremos, no comunes, de estos lados, forman un triángulo rectángulo del cual conocemos la hipotenusa (diagonal del cuadrado) y desconocemos los dos catetos (lados del cuadrado) que miden lo mismo.



$d^2 = c^2 + c^2 = 2\ c^2 \rightarrow 2{,}82^2 = 2\ c^2 \rightarrow 8 = 2\ c^2 \rightarrow c^2 = 4 \rightarrow c = 2$ m

Como el lado del mantel mide lo mismo que el diámetro de la mesa podemos calcular el radio de la mesa dividiendo la longitud del lado del mantel entre 2:



$2 \cdot r = 2$ m $\rightarrow r = 1$ m, que es el valor esperado, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente igual que para el estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, ya que como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria y la diferencia podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para hacer la comprobación, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:10, por ejemplo, mediríamos la longitud de la diagonal del mantel mediante una regla, y obtendríamos una medida muy aproximada a 28,2 cm, que al «deshacer la escala» son los 2,82 m solución del problema, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.5

En un restaurante, para la cena de Nochevieja, han preparado una mesa rectangular de 1,20 metros por 0,80 metros poniéndole un mantel circular que, centrado en la mesa, llega justo a sus cuatro esquinas. Calcula los metros cuadrados de mantel que cuelga, que sobresale, de la mesa.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

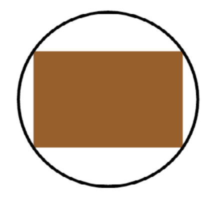
1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Las dimensiones de la mesa rectangular son 1,20 metros por 0,80 metros.
  - El mantel es un círculo que está circunscrito al rectángulo.

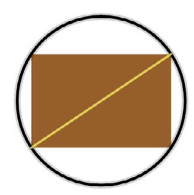
Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:



- Incógnitas:
    - Los metros cuadrados de mantel que cuelga, que sobresale, de la mesa, es decir, el área de la parte de mantel que cuelga.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, porque con dimensiones reales o a escala (1:10, por ejemplo), con una escuadra o un cartabón, o programas de geometría dinámica, podemos dibujar el rectángulo. La diagonal es el diámetro del círculo circunscrito, entonces podemos medirla, y al dividirla por dos obtendremos la medida del radio del círculo, con lo que podremos dibujar la circunferencia, el borde del círculo.



Mediante centímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados, podríamos medir la superficie del círculo y del rectángulo, siendo la diferencia de las dos áreas el área de la parte del tapete que cuelga. Finalmente, transformaríamos esta medida a metros cuadrados («deshacemos la escala»).

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) A partir del dibujo alusivo, vemos que la diagonal del rectángulo es el diámetro del círculo circunscrito, entonces por el teorema de Pitágoras calcularemos la medida de la diagonal, que llamaremos «d».
b) Como hemos dicho antes, la mitad será la medida del radio del círculo, que llamaremos «r», con lo que calcularemos el área del círculo circunscrito, que denominaremos «A_C».
c) Calcularemos también el área del rectángulo, que llamaremos «A_R», multiplicando sus dimensiones.
d) Restaremos el área del rectángulo al área del círculo circunscrito y obtendremos el área de la parte del mantel que cuelga, que llamaremos «A», es decir, la cantidad de mantel que sobresale de la mesa.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $d^2 = 1{,}2^2 + 0{,}8^2 = 1{,}44 + 0{,}64 = 2{,}08\ m^2;\ d = \sqrt{2{,}08} = 1{,}44\ m$

b) $r = \frac{1{,}44}{2} = 0{,}72\ m$

$A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0{,}72)^2 = 0{,}52\pi = 1{,}63\ m^2$

c) $A_R = 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96\ m^2$
d) $A = A_C - A_R = 1{,}63 - 0{,}96 = 0{,}67\ m^2$

Solución: la cantidad de mantel que cuelga, que sobresale, de la mesa es de 0,67 m^2.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Como podemos ver en el dibujo alusivo, la superficie del círculo, del mantel, es mayor que la del rectángulo de la mesa, lo que ocurre también con las respectivas áreas, 1,63 m^2 y 0,96 m^2, por tanto, la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Para validar la solución, utilizamos el método «cambiar los datos proporcionalmente», por lo que duplicamos las medidas de los lados del rectángulo, entonces el nuevo problema sería «*En un restaurante, para la cena de Nochevieja, han preparado una mesa rectangular de 2,40 metros por 1,60 metros poniéndole un mantel circular que, centrado en la mesa, llega justo a sus cuatro esquinas. Calcula los metros cuadrados de mantel que cuelga, que sobresale, de la mesa*». Como el área es una magnitud cuadrática y los datos duplicados son de una magnitud lineal, estimamos que la nueva solución será cuatro veces mayor, es decir, $4 \cdot 0{,}67 = 2{,}68\ m^2$.

Hacemos los cálculos:

a) $d^2 = 2{,}4^2 + 1{,}6^2 = 5{,}76 + 2{,}56 = 8{,}32\ m^2;\ d = \sqrt{8{,}32} = 2{,}88\ m$
b) $r = \frac{2{,}88}{2} = 1{,}44\ m.$
$A_C = \pi \cdot (1{,}44)^2 = 2{,}08\pi = 6{,}53\ m^2$
c) $A_R = 2{,}4 \cdot 1{,}6 = 3{,}84\ m^2$
d) $A = A_C - A_R = 6{,}53 - 3{,}84 = 2{,}69\ m^2$

Que es, aproximadamente, el valor de la estimación realizada, por lo tanto, el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Como hemos justificado en el problema B.3, los conceptos de polígono inscrito, círculo circunscrito y la utilización del teorema de Pitágoras deben figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria, por lo que, creemos que el problema se puede plantear en este nivel escolar.

Entonces, la resolución es prácticamente la misma, la diferencia podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:10, por ejemplo, mediríamos la superficie de mantel que cuelga de la mesa mediante centímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados, y obtendríamos una medida muy aproximada a 67 cm^2, que al «deshacer la escala» son los 0,67 m^2 solución del problema en la 3.ª fase, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.6

En un restaurante, para la cena de Nochevieja, han preparado una mesa rectangular poniéndole un mantel circular de 10 decímetros de diámetro, centrado en la mesa, cuyo borde llega justo a los cuatro lados de esta. Calcula las dimensiones de la mesa sabiendo que el ancho es 3/4 de la longitud.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

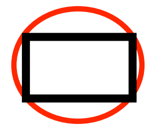
1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Una mesa rectangular.
  - Un mantel circular de 10 dm de diámetro centrado en la mesa, cuyo borde llega justo a sus cuatro esquinas.
  - En las dimensiones de la mesa, el ancho es 3/4 de la longitud.

Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:



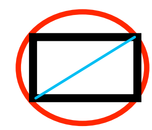
ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Incógnitas:
    - Las dimensiones de la mesa.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «a» a la medida de la anchura de la mesa y «b» a la medida de la longitud, la condición que relaciona las dimensiones de la mesa se puede expresar por la ecuación: $a = (3/4) \cdot b$.

Como el tapete circular está centrado en la mesa, y su borde llega justo a sus cuatro esquinas, como se ve en el dibujo, entonces, la medida de la diagonal del rectángulo de la mesa coincide con la del diámetro del tapete, 10 dm.



Dos lados contiguos del rectángulo junto con la diagonal que une los extremos no coincidentes de los mismos, determinan un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras lo expresamos mediante la ecuación: $10^2 = a^2 + b^2$.

Por lo tanto, los datos del problema se traducen en el siguiente sistema de dos incógnitas y dos ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ 10^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right\}$.

La representación gráfica, en dos dimensiones, de la primera ecuación es una recta que pasa por el origen de coordenadas y, la de la segunda ecuación es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y radio 10, por lo que ambas figuras se cortarán en dos puntos, que serán las soluciones del sistema de ecuaciones, luego el sistema es resoluble, entonces creemos que, posiblemente, el problema también es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ 10^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right\} \to 10^2 = \left[\left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \right]^2 + b^2 = \left(\frac{3b}{4}\right)^2 + b^2 = \frac{9b^2}{16} + b^2 =$$

$$= \frac{9b^2 + 16b^2}{16} = \frac{25b^2}{16} \to 100 = \frac{25b^2}{16} \to b^2 = \frac{100 \cdot 16}{25} = 64 \to b = 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ b = 8 \end{array} \right\} \to a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 8 = 6$$

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Comprobamos que el sistema $\begin{cases} a = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b \\ 10^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$ está bien resuelto:

$$\begin{cases} a = 6; \left(\frac{3}{4}\right) \cdot b = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 8 = 6 \\ a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 \end{cases}..$$

Por lo tanto, solución: anchura de la mesa 6 decímetros, longitud 8 decímetros.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

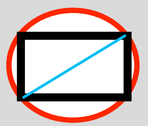
Las medidas de los lados de la mesa son menores que la de su diagonal, por lo que creemos que las soluciones, dimensiones de la mesa, son razonables.

B) Comprobar la solución

Aplicamos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos las dimensiones de la mesa (eran incógnita y pasan a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos el diámetro del tapete (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el problema: «*En un restaurante, para la cena de Nochevieja, han preparado una mesa rectangular de 8 dm de longitud y 6 dm de anchura. La cubre un tapete circular centrado en la mesa, cuyo borde llega justo a sus cuatro esquinas. ¿Qué medida tiene el diámetro del tapete circular? ¿Cuál es la proporción entre el ancho y el largo de la mesa?*». Esperamos que tenga 10 decímetros de diámetro y que la proporción sea de 3/4.

Hacemos los cálculos necesarios:

Como el tapete circular está centrado en la mesa, y su borde llega justo a sus cuatro esquinas, la diagonal del rectángulo de la mesa coincidirá con un diámetro del tapete (d), como se ve en el dibujo.



Dos lados contiguos del rectángulo junto con la diagonal que une los extremos no coincidentes de los mismos, determina un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras tenemos: $d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$, entonces d = 10 dm, como esperábamos.

La proporción entre el ancho y el largo de la mesa es: $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$, como esperábamos.

Por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria, por lo que creemos que el problema se puede plantear en este nivel escolar.

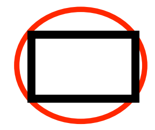
1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Una mesa rectangular.
  - Un tapete, un sobremesa, circular de 10 cm de diámetro centrado en la mesa, cuyo borde llega justo a sus cuatro esquinas.
  - En las dimensiones de la mesa, el ancho es 3/4 de la longitud.

Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:

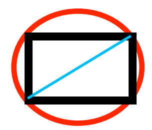


- Incógnitas:
  - Las dimensiones de la mesa.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «a» a la medida de la anchura de la mesa y «b» a la medida de la longitud, tenemos: «a es 3/4 de b».

Como el tapete circular está centrado en la mesa, y su borde llega justo a sus cuatro esquinas, como se ve en el dibujo, entonces, la medida de la diagonal del rectángulo de la mesa coincide con la del diámetro del tapete, 10 dm.



Dos lados contiguos del rectángulo junto con la diagonal que une los extremos no coincidentes de los mismos, determinan un triángulo rectángulo; por el teorema de Pitágoras lo expresamos mediante la ecuación: $10^2 = a^2 + b^2$.

Haremos pruebas con medidas que satisfagan las condiciones de la relación entre las dimensiones de la mesa y miraremos si la suma de sus cuadrados puede

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

dar 10 al cuadrado, como establece el teorema de Pitágoras. Lo apuntaremos en una tabla para visualizarlo mejor.

Como la anchura es 3/4 de la longitud, empezaremos dando valores a la longitud. Si la suma de los cuadrados de dos números tiene que dar 10 al cuadrado, los dos tienen que ser menores de 10, por lo que empezamos probando con que la longitud sea 9 decímetros.

LONGITUD: «b»	ANCHURA: «a» a es 3/4 de b	a^2; b^2	¿$a^2 + b^2 = 10^2$?
9	a = (3/4) · 9 = 6,75	45,56; 81	45,56 + 81 = 126,56 > 100
7	a = (3/4) · 7 = 5,25	27,56; 49	27,56 + 49 = 76,56 < 100

De la tabla de valores deducimos que si las medidas de la mesa rectangular fueran 9 dm y 6,75 dm, la diagonal del rectángulo, y por tanto, el diámetro del tapete, mediría más de 10 dm, mientras que si las dimensiones de la mesa rectangular fueran 7 dm y 5,25 dm, el diámetro del tapete mediría menos de 10 dm, podemos pensar, por tanto, que habrá unas medidas de la mesa rectangular para las que el diámetro del tapete mediría 10 dm, entonces, el problema sería resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Considerando los datos del problema, seguiremos tanteando con medidas de la longitud entre 9 y 7 dm, tratando de encontrar las dimensiones de la mesa rectangular que hacen que el diámetro del tapete mida 10 dm.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Como la longitud de la mesa debe estar entre 9 y 7 dm, empezaremos probando en 8 dm y, según los resultados probaremos con 8,5 o 7,5 dm, para coger números lo más redondeados posible.

LONGITUD: «b»	ANCHURA: «a» a es 3/4 de b	a^2; b^2	¿$a^2 + b^2 = 10^2$?
8	a = (3/4) · 8 = 6	36; 64	$36 + 64 = 100 = 10^2$
8,5	a = (3/4) · 8,5 = 6,37	40,64; 72,25	40,64 + 72,25 = = 112,89 > 100
7,5	a = (3/4) · 7,5 = 5,62	27,56; 56,25	27,56 + 56,25 = = 87,89 < 100

Vemos que 8 dm de longitud y 6 dm de anchura es la solución del problema y que, con valores para la longitud mayores de 8 dm (9 dm, 8,5 dm), el diámetro del tapete supera los 10 dm, mientras que con valores para la longitud menores de 8 dm (7 dm, 7,5 dm) el diámetro del tapete es menor de 10 dm.

Por lo tanto, la única solución del problema es la siguiente: anchura de la mesa rectangular, 6 decímetros; longitud, 8 decímetros.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Las medidas de los lados de la mesa rectangular son menores que la de su diagonal, por lo que creemos que las soluciones, las dimensiones de la mesa, son razonables.

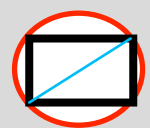
B) Comprobar la solución

Aplicamos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos las dimensiones de la mesa (eran incógnita y pasan a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos el diámetro del tapete (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el problema: «*En un restaurante, para la cena de Nochevieja, han preparado una mesa rectangular de 8 dm de longitud y 6 dm de anchura. La cubre un tapete circular centrado en la mesa, cuyo borde llega justo a sus cuatro esquinas. ¿Qué medida tiene el diámetro del tapete circular? ¿Cuál es la proporción entre el ancho y el largo de la mesa?*». Esperamos que tenga 10 decímetros de diámetro y que la proporción sea de 3/4.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hacemos los cálculos necesarios:

Como el tapete circular está centrado en la mesa, y su borde llega justo a sus cuatro esquinas, la diagonal del rectángulo de la mesa coincidirá con un diámetro del tapete (d), como se ve en el dibujo.



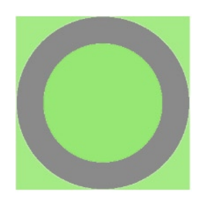
Dos lados contiguos del rectángulo junto con la diagonal que une los extremos no coincidentes de los mismos, determina un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras tenemos: $d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$, entonces, d = 10 dm, como esperábamos.

La proporción entre el ancho y el largo de la mesa es: $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$, como esperábamos.

Por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.7

En el pueblo, una plaza de nueva creación, cuadrada de 70,71 metros de diagonal, se quiere urbanizar según muestra la figura. La zona de color gris, de 8 metros de ancho, será de adoquines, y las zonas de color verde serán ajardinadas. El presupuesto es de 60 € por cada metro cuadrado de zona ajardinada y 50 € por cada metro cuadrado de zona adoquinada. ¿Cuánto costará la urbanización de la plaza?



❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - o La figura representación de la plaza.
  - o La diagonal de la plaza cuadrada mide 70,71 m.

- La zona ajardinada (la más oscura) son las cuatro esquinas y el círculo central.
- La zona adoquinada (la más clara) tiene 8 m de ancho.
- Cada metro cuadrado de la zona ajardinada cuesta 60 €.
- Cada metro cuadrado de la zona adoquinada cuesta 50 €.

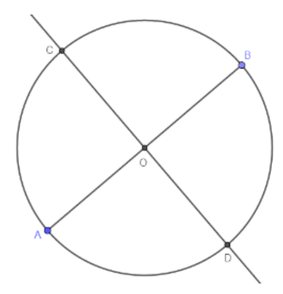
• Incógnitas:

- Coste de la urbanización de la plaza.

B) ¿El problema es resoluble?

Podemos hacer un dibujo a escala tomando como unidad de medida el milímetro, es decir, 1 milímetro en el dibujo es 1 metro de la realidad (escala 1:1.000).

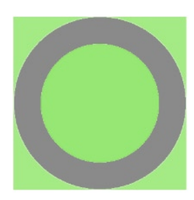
Como conocemos la medida de la diagonal del cuadrado, dibujamos con escuadra y cartabón o programas de geometría dinámica, un segmento «AB» que mida aproximadamente 70,71 mm. A continuación trazamos su mediatriz y llamamos «O» al punto de corte.



Para dibujar la otra diagonal del cuadrado, como 70,71 mm : 2 = 35,35 mm, con el compás y una apertura de 35,35 mm, aproximadamente, con centro en el punto O, trazamos una circunferencia que cortará la mediatriz en los puntos «C» y «D». Ya tenemos la otra diagonal, CD.

Unimos los puntos A, B, C, D y formamos el contorno del cuadrado, al que llamaremos «Cu».

Dibujamos ahora la circunferencia inscrita en este cuadrado, que llamaremos «C_i», y que, como podemos ver en el dibujo alusivo a la plaza, tendrá como medida del radio la mitad de la medida del lado del cuadrado y por centro el punto O.



Trazamos otra circunferencia concéntrica con C_i, de radio 8 mm menor.

Ya tenemos el dibujo a escala de la plaza del pueblo. La zona comprendida entre ambas circunferencias corresponde a una corona circular y es la zona de adoquines, el resto del cuadrado es la zona ajardinada.

A continuación, podemos medir estas superficies con centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados de tela o de papel, o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados, y transformar estas medidas a metros cuadrados, «deshacemos la escala», después multiplicaremos cada una de ellas por su coste por metro cuadrado y sumaremos los dos resultados obtenidos. Calcularemos así el coste aproximado de la urbanización de la plaza.

Por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como conocemos la medida de la diagonal del cuadrado que forma la plaza, que llamaremos «d», podemos calcular la medida del lado de la plaza, que denominaremos «c», utilizando el teorema de Pitágoras: $c^2 + c^2 = d^2$.

b) Podemos ver, en el dibujo alusivo a la plaza, que la medida del radio de la circunferencia inscrita, C_i, es la mitad de la medida del lado, que llamaremos «R», $R = \frac{c}{2}$.

Como la zona adoquinada tiene 8 m de ancho, la medida del radio de la circunferencia concéntrica interior, que llamaremos «r», es 8 m menor que el radio de C_i.

c) Estas dos circunferencias limitan la zona de adoquines, con forma de corona circular, que llamaremos «CC». Procederemos a calcular su área, «A_{CC}», restando al área del círculo asociado a la circunferencia inscrita el área del círculo asociado a la circunferencia concéntrica interior: $A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$.

d) Calculamos el área del cuadrado Cu, que llamaremos «A_{Cu}»: A_{Cu} = C2.

e) Del dibujo alusivo a la plaza podemos deducir que, de la zona ajardinada, «za», el área, «A_{za}», se obtiene restando al área del cuadrado el área de la corona circular: $A_{za} = A_{Cu} - A_{CC}$.

f) Obtenemos el coste de empedrar la corona circular, lo llamaremos «$Cost_{CC}$», multiplicando su área por el precio del metro cuadrado, y obtenemos el coste de ajardinar el resto de la plaza, que llamaremos «$Cost_{za}$», multiplicando su área por el precio del metro cuadrado.

g) Finalmente, sumaremos ambos resultados para obtener el coste total de la urbanización, que llamaremos «$Cost_T$».

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 + c^2 = d^2 \rightarrow 2c^2 = (70{,}71)^2 \rightarrow c^2 = \frac{5.000}{2} = 2.500 \rightarrow c = \sqrt{2.500} = 50 \text{ m}$$

b) Calculamos los radios de las circunferencias concéntricas:

$$R = \frac{c}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m} \rightarrow r = R - 8 = 25 - 8 = 17 \text{ m}$$

c) Ahora calculamos el área de la corona circular que forman, que es la superficie a empedrar:

$$A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 17^2 = 1.055{,}57 \text{ m}^2$$

d) El área del cuadrado es: $A_{Cu} = c^2 = 502 = 2.500 \text{ m}^2$

e) Calculamos el área de la zona ajardinada:

$A_{za} = A_{Cu} – A_{CC} = 2.500 – 1.055,57 = 1.444,43$ m2

f) El coste de cada zona de la plaza es:

$Cost_{CC} = 1.055,57 \cdot 50 = 52.778,50$ €; $Cost_{za} = 1.444,43 \cdot 60 = 86.665,80$ €

g) El coste total de la plaza es:

$Cost_T = 52.778,50 + 86.665,80 = 139.444,30$ €

Solución: la urbanización de la plaza costará 139.444,30 € .

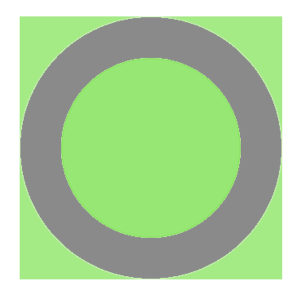
4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

La plaza que tiene 2.500 m^2 de superficie, si la tuviéramos que urbanizar toda al precio de 50 €/m^2 costaría 125.000 €. Por otro lado, si toda la urbanización fuera a 60 €/m^2, costaría 150.000 €. Evidentemente, el coste real de urbanizar la plaza donde una parte es a 50 €/m^2 y otra parte es a 60 €/m^2, deberá ser un coste entre 125.000 y 150.000 €, como es el caso que nos ocupa (139.444 €), por lo que la solución del problema es razonable.

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, elegimos la de «cambio de dato por incógnita y viceversa». Supongamos que conocemos el coste de urbanizar la plaza (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos cuánto se ha pagado por cada metro cuadrado de zona ajardinada (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, el enunciado del nuevo problema es: «*En el pueblo, una plaza de nueva creación, cuadrada de 70,71 metros de diagonal, se quiere urbanizar según muestra la figura. La zona de color gris, de 8 metros de ancho, será de adoquines, y las zonas de color verde serán ajardinadas. Se han pagado 50 € por cada metro cuadrado de zona adoquinada y la urbanización total de la plaza ha costado 139.444,30 €. ¿Cuánto se ha pagado por cada metro cuadrado de zona ajardinada de la plaza?*». Esperamos que el precio del metro cuadrado de zona ajardinada haya sido de 60 €.



ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hacemos los cálculos:

Como todos los datos de la plaza y las figuras consideradas en ella son las mismas que en el problema original, podemos aprovechar alguno de los resultados obtenidos en la 3.ª fase, como por ejemplo las medidas de diferentes figuras. Entonces, sabemos también el coste de la zona de adoquines, 52.778,50 €.

Conocemos el coste total, 139.444,30 €, por lo que el coste de la zona ajardinada, $Cost_{za}$, será la diferencia del total y de la zona adoquinada: 139.444,30 € – 52.778,50 € = 86.665,80 €.

Por lo dicho dos párrafos más arriba, sabemos cuánto mide la zona ajardinada, 1.444,43 m^2, por lo tanto, el precio del metro cuadrado de zona ajardinada será: 86.665,80 € : 1.444,43 m^2 = 60 €/m^2.

Que coincide con el valor esperado, entonces, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución sería muy parecida a la del estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, porque como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria y, según el Decreto 108/2014, en el 6.º curso de Educación Primaria, en el bloque 4: Geometría, del área de Matemáticas, por el contenido «Formas planas. Construcción y reproducción», criterio de evaluación BL4.1 «Reproducir y clasificar figuras del entorno (natural, artístico, arquitectónico, etc.) basándose en alguna de sus propiedades, con los recursos apropiados (cinta métrica, fotografías , programas de geometría dinámica, etc.), utilizando el vocabulario adecuado para explicar el mundo que nos rodea», probablemente solo tendríamos que introducir la denominación de la figura geométrica «corona circular», ya que el concepto forma parte del bagaje cultural del alumnado de esta etapa educativa, por lo que creemos que el problema se puede plantear en este nivel escolar.

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

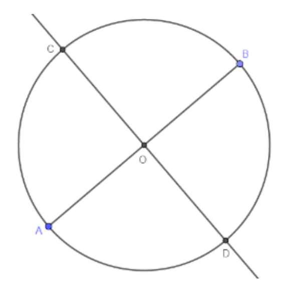
- Datos:
  - La figura representación de la plaza.
  - La diagonal de la plaza cuadrada mide 70,71 m.
  - La zona ajardinada (la más oscura) son las cuatro esquinas y el círculo central.
  - La zona adoquinada (la más clara) tiene 8 m de ancho.
  - Cada metro cuadrado de la zona ajardinada cuesta 60 €.
  - Cada metro cuadrado de la zona adoquinada cuesta 50 €.

- Incógnitas:
  - Coste de la urbanización de la plaza.

B) ¿El problema es resoluble?

Podemos hacer un dibujo a escala tomando como unidad de medida el milímetro, es decir, 1 milímetro en el dibujo es 1 metro de la realidad (escala 1:1.000).

Como conocemos la medida de la diagonal del cuadrado, dibujamos con escuadra y cartabón o programas de geometría dinámica, un segmento «AB» que mida aproximadamente 70,71 mm. A continuación trazamos su mediatriz y llamamos «O» al punto de corte.

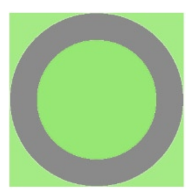


Para dibujar la otra diagonal del cuadrado, como 70,71 mm : 2 = 35,35 mm, con el compás y una abertura de 35,35 mm, aproximadamente, con centro en el punto O, trazamos una circunferencia, que cortará la mediatriz en los puntos «C» y «D». Ya tenemos la otra diagonal, CD.

Unimos los puntos A, B, C, D y formamos el contorno del cuadrado, al que llamaremos «Cu».

Dibujamos ahora la circunferencia inscrita en este cuadrado, que llamaremos «C_i», y que, como podemos ver en el dibujo alusivo a la plaza, tendrá como medida del radio la mitad de la medida del lado del cuadrado y por centro el punto O.

Trazamos otra circunferencia concéntrica con C_i, de radio 8 mm menor.



Ya tenemos el dibujo de la plaza del pueblo a escala. La zona comprendida entre ambas circunferencias corresponde a una corona circular y es la zona de adoquines, el resto del cuadrado es la zona ajardinada.

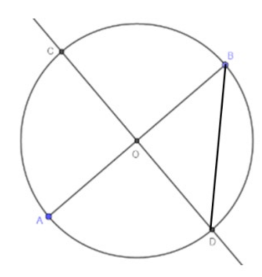
A continuación, podemos medir estas superficies con centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados de tela o de papel, o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados, y transformar estas medidas a metros cuadrados, «deshacemos la escala», después multiplicaremos cada una de ellas por su coste por metro cuadrado y sumaremos los dos resultados obtenidos. Calcularemos así el coste aproximado de la urbanización de la plaza.

Por lo tanto, el problema es resoluble.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como conocemos la medida de la diagonal del cuadrado que forma la plaza, que llamaremos «d», podemos calcular la medida del lado de la plaza, que llamaremos «c», utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo BOD, pues la medida de sus lados $\overline{BO}$ y $\overline{DO}$ es la mitad de 70,71 mm (35, 35 mm) y la hipotenusa $\overline{BD}$ es el lado del cuadrado, medida que, por lo tanto, podemos calcular: $35{,}35^2 + 35{,}35^2 = c^2$.



b) Podemos ver, en el dibujo alusivo a la plaza, que la medida del radio de la circunferencia inscrita, C_i, es la mitad de la medida del lado, que llamaremos «R», $R = \frac{c}{2}$.
Como la zona adoquinada tiene 8 m de ancho, la medida del radio de la circunferencia concéntrica interior, que llamaremos «r», es 8 m menor que el radio de C_i.

c) Estas dos circunferencias limitan la zona de adoquines, con forma de corona circular, que llamaremos «CC». Procederemos a calcular su área, «A_{CC}», restando al área del círculo asociado a la circunferencia inscrita el área del círculo asociado a la circunferencia concéntrica interior: $A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$.

d) Calculamos el área del cuadrado Cu, que llamaremos «A_{Cu}»: $A_{Cu} = c^2$.

e) Del dibujo alusivo a la plaza podemos deducir que, de la zona ajardinada, «za», el área, «A_{za}», se obtiene restando al área del cuadrado el área de la corona circular: $A_{za} = A_{Cu} - A_{CC}$.

f) Obtenemos el coste de empedrar la corona circular, que llamaremos «$Cost_{CC}$», multiplicando su área por el precio del metro cuadrado, y obtenemos el coste de ajardinar el resto de la plaza, «$Cost_{za}$», multiplicando su área por el precio del metro cuadrado.

g) Finalmente, sumaremos ambos precios para obtener el coste total de la urbanización, que llamaremos «$Cost_T$».

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo BOD:
$35{,}35^2 + 35{,}35^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 1.250 + 1.250 = 2.500 \rightarrow c = \sqrt{2.500} = 50$ m

b) Calculamos los radios de las circunferencias concéntricas:
$R = \frac{c}{2} = \frac{50}{2} = 25$ m $\rightarrow r = R - 8 = 25 - 8 = 17$ m

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

c) Ahora calculamos el área de la corona circular que forman, que es la superficie a empedrar:
$A_{CC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 17^2 = 1.055,57\ m^2$

d) El área del cuadrado es: $A_{Cu} = c^2 = 50^2 = 2.500\ m^2$

e) Calculamos el área de la zona ajardinada:
$A_{za} = A_{Cu} - A_{CC} = 2.500 - 1.055,57 = 1.444,43\ m^2$

f) El coste de cada zona de la plaza es:
$Cost_{CC} = 1.055,57 \cdot 50 = 52.778,50$ €; $Cost_{za} = 1.444,43 \cdot 60 = 86.665,80$ €

g) El coste total de la plaza es:
$Cost_T = 52.778,50 + 86.665,80 = 139.444,30$ €

Solución: la urbanización de la plaza costará 139.444,30 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

La plaza que tiene 2.500 m^2 de superficie, si la tuviéramos que urbanizar toda al precio de 50 €/m^2 costaría 125.000 €. Por otro lado, si toda la urbanización fuera a 60 €/m^2, costaría 150.000 €. Evidentemente, el coste real de urbanizar la plaza donde una parte es a 50 €/m^2 y otra parte es a 60 €/m^2, deberá ser un coste entre 125.000 y 150.000 €, como es el caso que nos ocupa (139.444 €), por lo que la solución del problema es razonable.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaemos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:1.000, mediríamos las superficies con centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados de tela o de papel, o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados, y obtendríamos, aproximadamente, 1.055 mm^2 para la corona circular y 1.444 mm^2 para la zona ajardinada, transformaríamos estas medidas a metros cuadrados, «deshacemos la escala», 1.055 m^2 y 1.444 m^2, respectivamente.

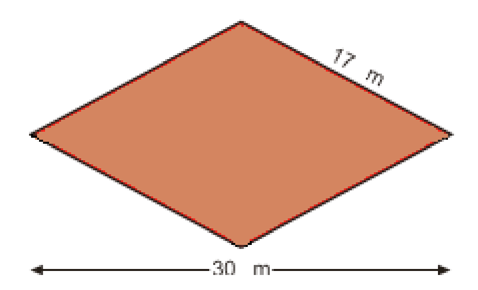
Por tanto, el coste de la urbanización de la plaza es:

1.055 $m^2 \cdot$ 50 €/m^2 + 1.444 $m^2 \cdot$ 60 €/m^2 = 52.750 € + 86.640 € = 139.390 €, aproximadamente los 139.444,30 € que habíamos obtenido en la 3.ª fase, entonces, podemos pensar que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Problema B.8

En la urbanización de una zona de ampliación de la ciudad confluyen cuatro calles que forman un rombo como el que se indica en la figura adjunta. La Concejalía de Urbanismo duda entre simplemente asfaltar la superficie romboidal o hacer una rotonda formada por una zona central ajardinada, que sería un círculo de diámetro la diagonal menor del rombo, y la zona asfaltada que estaría limitada por la circunferencia de diámetro la diagonal mayor del rombo, por lo que quieren averiguar los metros cuadrados a asfaltar en cada una de las dos opciones. Calcula la cantidad de metros cuadrados a asfaltar en ambos casos.



❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

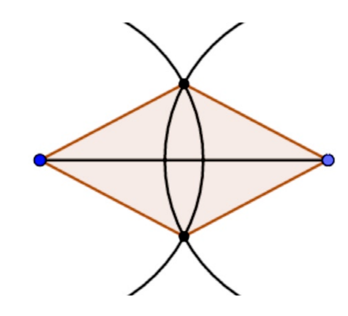
- Datos:
  - Rombo de 17 m de lado y 30 m de diagonal mayor.
  - Rotonda formada por una zona central ajardinada, que sería un círculo de diámetro la diagonal menor del rombo.
  - La zona asfaltada de la rotonda estaría limitada por la circunferencia de diámetro la diagonal mayor del rombo.
- Incógnitas:
  - El área, en metros cuadrados, del rombo y de la zona asfaltada de la rotonda.

B) ¿El problema es resoluble?

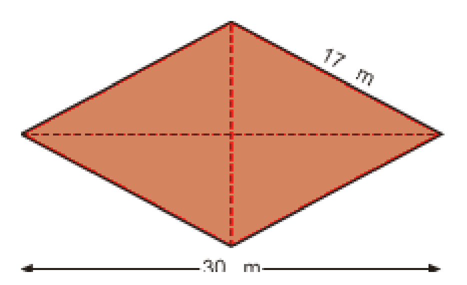
Podemos hacer un dibujo con programas de geometría dinámica o a escala. Por ejemplo, a escala 1:100, luego 1 cm en el dibujo corresponderá a 1 m en la realidad.

Con la regla dibujamos un segmento de 30 cm, que será la diagonal mayor del rombo, por lo que los extremos del segmento serán dos de los vértices del rombo.

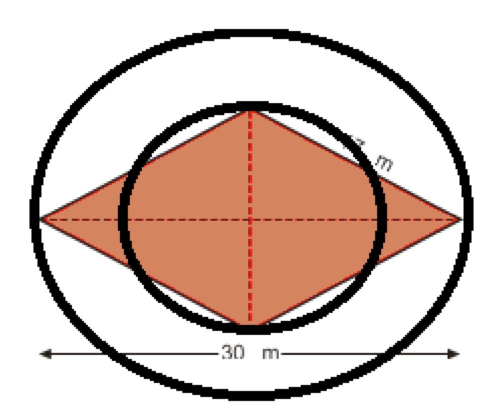
Cogemos el compás y con una abertura de 17 cm, un radio de 17 cm, desde un extremo del segmento trazamos un arco de circunferencia de radio de 17 cm. Desde el otro extremo del segmento trazamos, análogamente, otro arco de circunferencia del mismo radio, con lo que, en los puntos de corte de ambos arcos, tendremos los otros dos vértices del rombo.



Uniendo los cuatro vértices con la regla tendremos el contorno del rombo, el límite de su superficie.



Como tenemos construido el rombo, podemos trazar la diagonal menor (como se ve en la figura), que al cortarse con la diagonal mayor nos determinará el centro del círculo zona central ajardinada y de la circunferencia que limita la zona asfaltada de la rotonda. Haciendo centro con el compás en este punto, trazaremos las dos circunferencias, la que determina la zona central ajardinada y la que limita la zona asfaltada de la rotonda (como se ve en la figura). La zona asfaltada es la superficie entre las dos circunferencias.



Como hemos podido construir las dos superficies por medir, las recubriremos con centímetros cuadrados (de papel, de tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados, que contaremos. Por tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Para calcular el área del rombo, que llamaremos «A_R», aplicaremos su fórmula.
La medida de la diagonal mayor, que llamaremos «D», la sabemos, 30 m, luego tendremos que calcular la medida de la diagonal menor, que llamaremos «d».
Como se ve en la figura del rombo con las diagonales, estas forman triángulos rectángulos con los lados del rombo, triángulos en los que conocemos la medida de la hipotenusa, 17 m, y la medida de la base, la mitad de la medida de la diagonal mayor, 15 m, luego podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del cateto desconocido, que llamaremos «x».

b) El valor obtenido lo multiplicaremos por 2 para obtener la medida de la diagonal menor, d, con lo que ya podremos calcular el área del rombo, A_R.

c) Para calcular el área de la zona asfaltada de la rotonda, que llamaremos «A», tendremos que calcular la medida de la superficie del círculo grande, que llamaremos «A_{CG}», el que limita la circunferencia de diámetro la diagonal mayor del rombo, D, por tanto, calcularemos la medida del radio, que llamaremos «r_{CG}», y después aplicaremos la fórmula del área del círculo.

d) También calcularemos la medida de la superficie del círculo pequeño, de la zona central ajardinada de la rotonda, que llamaremos «A_{cp}», de diámetro la diagonal menor del rombo (d), por tanto, calcularemos la medida del radio, que llamaremos «r_{cp}», y después aplicaremos la fórmula del área del círculo.

e) Finalmente, para calcular la superficie de la zona asfaltada de la rotonda, A, simplemente tendremos que restarle a la medida de la superficie del círculo grande, A_{CG}, la medida de la superficie del círculo pequeño, A_{cp} : $A = A_{CG} - A_{cp}$.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $x^2 + 15^2 = 17^2 \rightarrow x^2 + 225 = 289 \rightarrow x^2 = 289 - 225 = 64 \rightarrow x = 8$ m

b) $d = 2 \cdot x = 2 \cdot 8 = 16$ m

$$A_R = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{30 \cdot 16}{2} = \frac{480}{2} = 240 \text{ m}^2$$

c) $D = 30 \text{ m} \rightarrow r_{CG} = \frac{30}{2} \text{ m} = 15 \text{ m}$

$$A_{CG} = \pi \cdot (r_{CG})^2 = \pi \cdot 15^2 = 225 \cdot \pi \text{ m}^2 = 706{,}5 \text{ m}^2$$

d) $d = 16 \text{ m} \rightarrow r_{cp} = \frac{d}{2} = 8 \text{ m}$

$$A_{cp} = \pi \cdot (r_{cp})^2 = \pi \cdot 8^2 = 64 \cdot \pi \text{ m}^2 = 200{,}96 \text{ m}^2$$

e) $A = A_{CG} - A_{cp} = (225 \cdot \pi - 64 \cdot \pi)\ m^2 = 161 \cdot \pi\ \ m^2 = 505{,}54\ m^2$

Si la superficie asfaltada fuera la romboidal sería de 240 m^2 y si la superficie asfaltada fuera la rotonda sería de 505,54 m^2.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí, porque como se ve en la imagen de las circunferencias y el rombo, la superficie del rombo es un poco mayor que la del círculo menor, la zona central ajardinada de la rotonda, como dicen las respectivas áreas.

Y también porque el radio del círculo grande es casi el doble que el radio del círculo pequeño, por lo que el área del círculo grande debería ser casi cuatro veces el área del círculo pequeño, y lo es.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, hemos repasado todos los cálculos y creemos que están bien, como el único dato que hemos tenido que calcular ha sido la diagonal menor del rombo, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la longitud de la diagonal menor del rombo (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la longitud del lado del rombo (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 30 y 16 metros*». Esperamos que la solución sea 17 m.

Hacemos simplemente los cálculos:

$$8^2 + 15^2 = c^2 \rightarrow 64 + 225 = c^2 \rightarrow c^2 = 289 \rightarrow c = \sqrt{289} = 17\ m$$

Que coincide con el valor esperado, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente igual que para el estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, ya que como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria.

Pero en este en concreto, hemos aplicado el teorema para calcular la medida de un cateto conocidas la medida de la hipotenusa y la del otro cateto ($a^2 = h^2 - b^2$).

Pensamos que es posible esta utilización, pues cuando se enseña al alumnado de Educación Primaria las diferentes conceptualizaciones de la sustracción de números naturales (Alcalde, Pérez y Lorenzo 2014), una de ellas es la correspondiente a la de «La sustracción como una adición incompleta», conocemos la suma y uno de los sumandos y desconocemos el otro sumando, por tanto, estamos aplicando conocimientos que el alumnado de Educación Primaria tendrá alcanzados.

La diferencia en la resolución podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para hacer la comprobación, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:100, por ejemplo, mediríamos las superficies con decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados de tela o papel, o plantillas cuadriculadas en decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados, y obtendríamos aproximadamente, 240 cm^2 para el rombo y 505 cm^2 para la zona asfaltada de la rotonda, que al «deshacer la escala» serían los 240 m^2 y 505,54 m^2, respectivamente, soluciones del problema, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.9

Una escalera de pintor tiene una altura de 1,80 m cuando está cerrada, pero abierta totalmente su altura solo llega a 1,60 m. Calcula la distancia que hay entre los pies de la escalera cuando está totalmente abierta.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

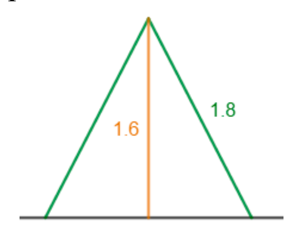
Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La escalera cerrada tiene una altura de 1,80 m.
  - La escalera totalmente abierta alcanza una altura de 1,60 m.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:



- Incógnitas:

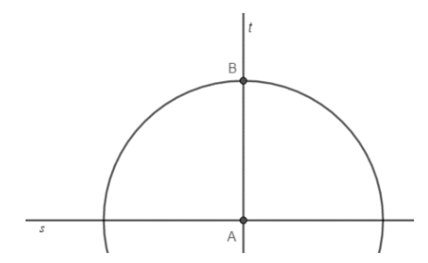
  - Distancia entre los pies de la escalera cuando está totalmente abierta.

B) ¿El problema es resoluble?

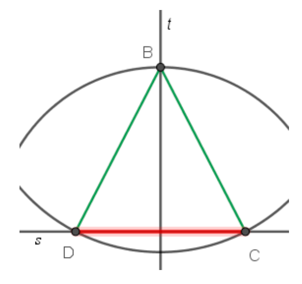
Si podemos dibujar la escalera totalmente abierta, con escuadra, cartabón y compás o programas de geometría dinámica, podremos medir la distancia que separa los pies de la misma, por lo tanto, el problema sería resoluble, entonces, veremos si con los datos dados se puede dibujar.

Consideramos la escala 1:10, por lo que 1 decímetro en nuestro dibujo corresponde a 1 metro en la realidad.

Trazamos una recta horizontal, que llamaremos *s*, que representará el suelo donde apoyamos la escalera, y una perpendicular a la misma, que llamaremos *t*. Marcamos el punto de corte de ambas rectas, que llamaremos «A». Con centro en el punto A y una abertura de 1,6 dm dibujamos un arco de circunferencia que corte la recta *t* por encima de la recta *s*, llamaremos a ese punto «B».



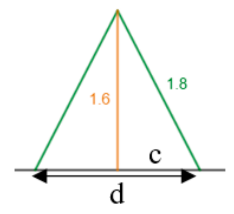
Con centro en B y una abertura de 1,8 dm dibujamos un arco de circunferencia que corte la recta *s* a ambos lados de la recta *t*, puntos que llamaremos «C» y «D». El segmento CB y el segmento DB representan los lados de la escalera y la longitud del segmento CD sería la distancia que separa los pies de la misma. Luego podremos medirlo con una regla, y deshaciendo la escala sabremos la medida real, por lo tanto, el problema es resoluble.



ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Para calcular la distancia entre los pies de la escalera, la longitud del segmento DC, que llamaremos «d», podemos dividir el triángulo isósceles DBC en dos triángulos rectángulos iguales y así, utilizando el teorema de Pitágoras, obtendremos la medida del cateto desconocido del triángulo (que llamaremos «c»), que será la mitad de la distancia.

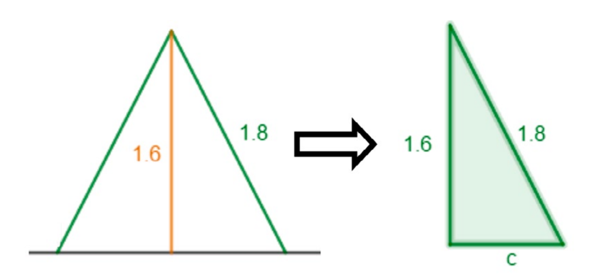


b) La distancia entre los pies de la escalera es el doble de la medida calculada en el apartado *a*).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $(1{,}8)^2 = (1{,}6)^2 + c^2 \rightarrow 3{,}24 = 2{,}56 + c^2 \rightarrow c^2 = 3{,}24 - 2{,}56 \rightarrow c^2 = 0{,}68 \rightarrow$
$\rightarrow c = 0{,}8246$ m

Utilizamos el teorema de Pitágoras:



b) $d = 2 \cdot c = 2 \cdot 0{,}8246 = 1{,}6492$ m $= 1{,}65$ m

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

a) *¿La solución es razonable?*

En el triángulo isósceles que forma la escalera totalmente abierta conocíamos la longitud de los lados iguales, 1,8 m, y el lado desigual mide 1,65 m. Estas medidas verifican las condiciones que deben cumplir las dimensiones de los lados de un triángulo «la diferencia entre las medidas de dos de sus lados es menor

ISBN: 78-84-17900-59-5

Manuel Alcalde Esteban y Pedro Nieves Merideño

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

que la del tercer lado y la suma de las medidas de dos de sus lados es mayor que la del tercer lado»:

$1{,}8 - 1{,}8 = 0 < 1{,}65$ y $1{,}8 + 1{,}8 = 3{,}6 > 1{,}65$
$1{,}8 - 1{,}65 = 0{,}15 < 1{,}8$ y $1{,}8 + 1{,}65 = 3{,}45 > 1{,}8$

por tanto, la solución es razonable.

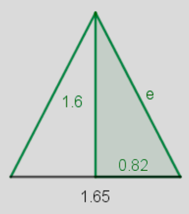
B) *Comprobar la solución*

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la distancia entre los pies de la escalera cuando está totalmente abierta (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos cuánto mide la escalera cuando está cerrada (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Una escalera de pintor tiene una altura de 1,60 m cuando está totalmente abierta y en esa posición la distancia entre sus pies es de 1,65 m. Calcula la longitud de la escalera cuando está cerrada*». Esperamos que la respuesta sea 1,80 m.

Hacemos los cálculos:

Llamamos «e» a la longitud de la escalera cuando está cerrada.

Para calcular esta longitud podemos dividir el triángulo isósceles, que se forma al abrirla totalmente, en dos triángulos rectángulos iguales, en los que conocemos el cateto horizontal, que mide la mitad de la distancia entre sus pies, y el cateto vertical, que es la altura que alcanza la escalera totalmente abierta, y así utilizando el teorema de Pitágoras, obtendremos la medida desconocida de la hipotenusa del triángulo rectángulo.



$1{,}65 : 2 = 0{,}825$
$e^2 = (1{,}6)^2 + (0{,}825)^2 \rightarrow e^2 = 2{,}56 + 0{,}68 = 3{,}24 \rightarrow e = \sqrt{3{,}24} = 1{,}80$ m, como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente igual que para el estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, ya que como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria y la diferencia en la resolución podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para hacer la comprobación, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:10, por ejemplo, mediríamos la longitud entre los pies de la escalera con una regla, y obtendríamos una medida muy aproximada a 16,5 cm, que al «deshacer la escala» son los 1,65 m solución del problema, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.10

En una mesa rectangular de 120 cm de largo por 80 cm de ancho se han colocado, dispuestos en dos hileras, 6 tapetes circulares iguales de color rojo, tangentes entre ellos y con los lados de la mesa. Calcula la superficie de mesa que queda sin cubrir.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

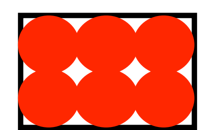
1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Mesa de dimensiones 120 cm por 80 cm.
  - Dispuestos en dos hileras, 6 tapetes circulares iguales de color rojo, tangentes entre ellos y con los lados de la mesa.

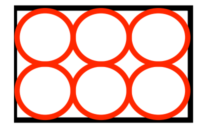
Lo que representamos proporcionalmente en el siguiente dibujo:



- Incógnitas:
  - El área de la superficie de la mesa que queda sin cubrir.

B) ¿El problema es resoluble?

Para poder decir si el problema es resoluble, como podemos deducir del dibujo alusivo, al ser los tapetes iguales, la condición de tangencia entre ellos y con los lados de la mesa debería ser posible, es decir, que el diámetro de los tapetes, dos veces, tuviera la misma dimensión que el ancho de la mesa y, que el diámetro de los tapetes, tres veces, tuviera la misma dimensión que el largo de la mesa.



Si dividimos 80 cm entre 2 (cantidad de tapetes tangentes a lo ancho) y si dividimos 120 cm entre 3 (cantidad de tapetes tangentes a lo largo), la medida del diámetro de los tapetes que se encuentra en los dos casos es 40 cm, por tanto, la situación planteada es posible.

Entonces, el problema es resoluble, ya que podemos medir la superficie de la mesa que queda sin cubrir por los tapetes mediante centímetros cuadrados y/o decímetros cuadrados (de papel, de tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o decímetros cuadrados.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Para calcular el área de la superficie de la mesa que queda sin cubrir por los tapetes, tendremos que:

a) Calcular el área de la mesa, del rectángulo, que llamaremos «A_R».
b) Calcular la medida del radio de un tapete, que llamaremos «r».
c) Obtener el área de un tapete, del círculo, que llamaremos «A_C».
d) Multiplicar por 6 el área de un tapete para saber cuánta superficie ocupan los tapetes, que llamaremos «A_T».
e) Calcular el área de la superficie de la mesa que queda sin cubrir por los tapetes, que llamaremos «A», por lo que, restaremos al área de la mesa el área de los 6 tapetes.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $A_R = 120 \cdot 80 = 9.600 \text{ cm}^2$
b) En la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*, hemos calculado que la medida del diámetro de los tapetes es 40 cm, por tanto, r = 40 : 2 = 20 cm.
c) $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 = 1.256 \text{ cm}^2$
d) $A_T = 1.256 \cdot 6 = 7.536 \text{ cm}^2$
e) $A = A_R - A_T = 9.600 - 7.536 = 2.064 \text{ cm}^2$

Solución: el área de la superficie de la mesa que queda sin cubrir por los tapetes es de 2.064 cm^2.

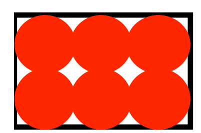
4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues como vemos en el dibujo alusivo, la superficie de la mesa, del rectángulo, es mayor que la de los 6 tapetes, como nos ha salido en la fase de antes, por lo que queda una pequeña parte de la mesa sin cubrir.

B) Comprobar la solución

Para confirmar la solución aplicaremos el método «cambiar el dato por incógnita y viceversa», concretamente, supondremos que conocemos el área de la superficie de la mesa que queda sin cubrir por los tapetes (antes era incógnita y ahora será dato en el nuevo problema) y calcularemos cuánto mide de ancho la mesa (antes era dato y ahora será incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el problema: «*En una mesa rectangular de 120 cm de larga se han colocado, dispuestos en dos hileras, 6 tapetes circulares iguales de color rojo, tangentes entre ellos y con los lados de la mesa. La superficie de mesa que queda sin cubrir por los tapetes es de 2.064 cm^2. ¿Cuánto mide de ancho la mesa?*». Esperamos que la nueva solución sea 80 cm.



Hacemos los cálculos.

Como los tapetes son iguales, tangentes entre ellos y con los lados de la mesa, podemos ver en el dibujo alusivo que los diámetros de tres tapetes alineados tienen la misma medida que la mesa de larga, entonces, 120 : 3 = = 40 cm será la medida del diámetro de un tapete.

Por lo que la medida del radio, que llamaremos «r», será, r = 40 : 2 = 20 cm, por tanto, el área de un tapete, de un círculo, que llamaremos «A_C», será $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 = 1.256$ cm^2.

Multiplicaremos por 6 el área de un tapete para saber cuánta superficie ocupan los tapetes, que llamaremos «A_T»: $A_T = 1.256 \cdot 6 = 7.536$ cm^2.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Entonces, si los tapetes cubren 7.536 cm^2 y el área de la superficie de la mesa que queda sin cubrir por los tapetes es de 2.064 cm^2, el área de la superficie de la mesa, que llamaremos «A_R» será: $A_R = 7.536 + 2.064 = 9.600$ cm^2.

La mesa es rectangular, por lo que, para calcular la anchura, que llamaremos «a», la despejaremos de la fórmula del área del rectángulo:

$A_R = 120 \cdot a = 9.600$ cm^2 $\rightarrow a = 9.600 : 120 = 80$ cm

Vemos que el resultado es el esperado, por lo tanto, creemos que el problema está bien.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente la misma que para el estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria, la diferencia podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

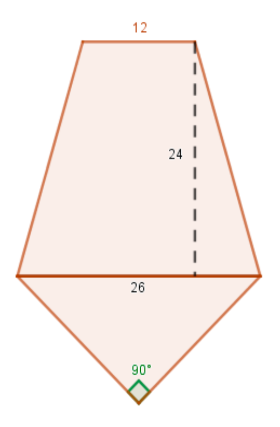
B) Comprobar la solución

Para hacer la comprobación, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo del problema a escala 1:10, es decir, la mesa sería un rectángulo de 12 cm por 8 cm, mediríamos la superficie de la mesa que queda sin cubrir por los tapetes mediante centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados (de papel, tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados y/o milímetros cuadrados, y obtendríamos una medida muy aproximada a 20,64 cm^2, que «deshaciendo la escala» serían 2.064 cm^2 en la realidad, solución del problema obtenida en la 3.ª fase, por lo que pensamos que el problema está bien.

Problema B.11

La siguiente imagen es el boceto en centímetros de una cuadra que queremos construir. La escala es 1:100, es decir, 1 cm en el boceto equivale a 1 m en la realidad. La cuadra tiene dos partes: una zona de terreno descubierta, con forma de trapecio isósceles, y el establo cubierto, donde se resguardan los caballos por la noche, formado por un terreno con forma de triángulo rectángulo isósceles. ¿Cuántos metros lineales de valla se necesitan para delimitar la cuadra?



❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Cuadra de forma pentagonal, formada por un trapecio isósceles y un triángulo rectángulo isósceles, como indica la imagen.
  - La medida de la base menor del trapecio isósceles, 12 cm.
  - La medida de la altura del trapecio isósceles, 24 cm.
  - La medida de la base mayor del trapecio isósceles y de la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles, 26 cm.

- Incógnitas:
  - Los metros lineales de valla que se necesitan para delimitar la cuadra, es decir, el perímetro del pentágono.

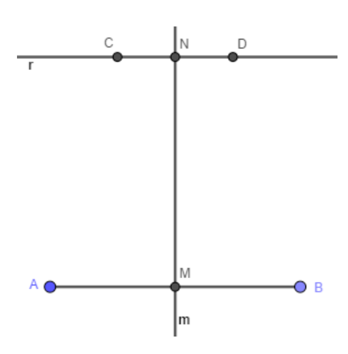
B) ¿El problema es resoluble?

Si podemos construir el pentágono, podremos medir el contorno y, por tanto, el problema sería resoluble, entonces veremos si con los datos dados se puede dibujar.

Trazamos un segmento de 26 cm de longitud de extremos «A» y «B», y su mediatriz («m»).

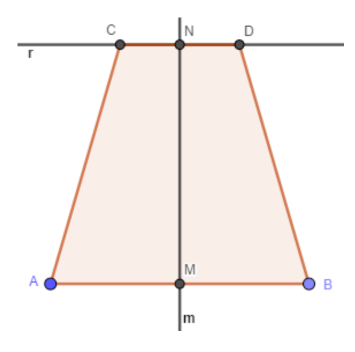
Desde el punto de corte de los elementos anteriores, lo llamaremos «M», medimos 24 cm sobre la mediatriz y marcamos el punto «N».

Dibujamos una perpendicular a la mediatriz por el punto N, que llamamos «r», y en ella medimos 6 cm a un lado y al otro de N, marcando los puntos «C» y «D», que serán los extremos de un segmento, de longitud 12 cm, paralelo al segmento inicial AB.

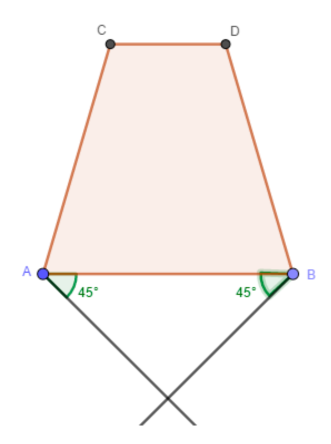


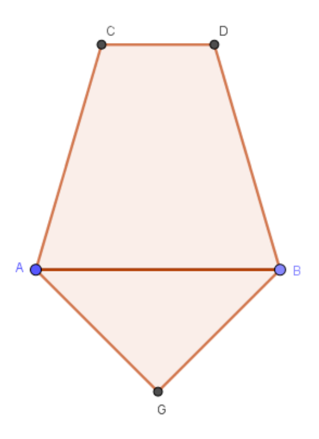
Estos segmentos serán las bases de nuestro trapecio isósceles. Siendo los puntos A, B, C y D los extremos de la base mayor y menor, respectivamente, del trapecio.

Uniendo los extremos del mismo lado de las bases del trapecio isósceles (respecto de la mediatriz) ya tenemos construido el trapecio.



Para dibujar el triángulo rectángulo isósceles haremos lo siguiente: los dos ángulos agudos son iguales (triángulo isósceles) y como la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°, además, por ser rectángulo el triángulo, cada uno de los dos ángulos agudos medirá 45°, entonces, con el semicírculo graduado trazaremos, desde los extremos de la base mayor del trapecio isósceles, dos semirrectas que forman 45° con la base, que, al cortarse, formarán el contorno del triángulo rectángulo isósceles.





ISBN: 78-84-17900-59-5

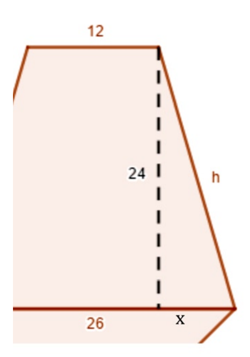
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hemos podido construir el pentágono con los datos del enunciado, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Para calcular el perímetro del pentágono, que llamaremos «P», con los datos que tenemos, solo necesitamos conocer la medida de los lados no básicos del trapecio isósceles y la medida de los catetos del triángulo rectángulo isósceles.

a) Para calcular la medida de los lados no básicos del trapecio, que llamaremos «h», como los lados son iguales por ser el trapecio isósceles, aplicaremos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que forma uno de ellos con la altura del trapecio y parte de la base mayor.



Se puede aplicar el teorema de Pitágoras porque, además de la medida del cateto vertical (24 cm) de este triángulo rectángulo considerado, podemos calcular la medida del cateto horizontal, que llamaremos «x», pues, por ser el trapecio isósceles, dicha medida es la mitad de la diferencia entre las longitudes de las bases mayor y menor del trapecio.

b) Para calcular la medida de los catetos del triángulo rectángulo isósceles, que llamaremos «c», aplicaremos el teorema de Pitágoras, porque al ser isósceles el triángulo rectángulo, los dos catetos son iguales, luego en la expresión del teorema de Pitágoras solo hay dos valores, en lugar de tres como es normal, la hipotenusa, que la conocemos (26 cm) y la medida del cateto del triángulo rectángulo isósceles (c), entonces: $26^2 = c^2 + c^2$, es decir, tenemos una ecuación y una incógnita.

c) Finalmente, calcularemos P sumando las medidas de todos los lados del contorno del pentágono.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $26 - 12 = 14$ cm $\rightarrow x = 14 : 2 = 7$ cm
$h^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \text{ cm}^2 \rightarrow h = \sqrt{625}$ cm = 25 cm

b) $26^2 = c^2 + c^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow c^2 = 26^2 : 2 \rightarrow c = 26 : \sqrt{2} = 18{,}38$ cm

c) $P = 12 + 25 + 18{,}38 + 18{,}38 + 25 = 98{,}76$ cm

Repasamos que los cálculos estén bien.

Entonces, como la escala es 1:100, se necesitan 98,76 metros lineales de valla para delimitar la cuadra.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Haremos una estimación del perímetro a partir de los datos del enunciado.

Mirando la figura del problema, como la altura del trapecio isósceles mide 24 cm, el lado no básico tendrá que ser mayor, estimamos que podría ser de 25 cm. Como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles mide 26 cm, los catetos tienen que medir menos, estimamos que miden 20 cm, entonces, la estimación del perímetro sería: P = 12 + 25 + 20 + 20 + 25 = 102 cm, que no es tan diferente del valor que hemos encontrado, por tanto, la solución P = 98,76 cm creemos que es un valor razonable.

B) Comprobar la solución

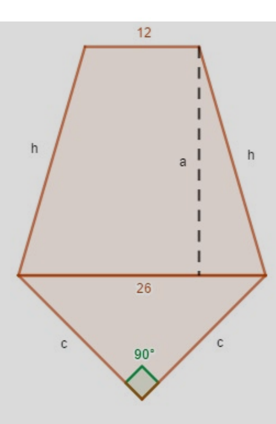
Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa». Suponemos que conocemos el perímetro (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la altura del trapecio isósceles (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el problema «*Siendo la escala 1:100, el boceto de una cuadra de forma pentagonal se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un terreno, con forma de trapecio isósceles, y la hipotenusa de otro, con forma de triángulo rectángulo isósceles, las cuales miden 26 cm. La base menor del trapecio mide 12 cm y el perímetro del pentágono es de 98,76 cm. ¿Cuánto mide la altura del trapecio?*». Esperamos que la medida de la altura del trapecio sea 24 cm.

Hacemos los cálculos necesarios:

El perímetro es la suma de todos los lados del pentágono: $P = 98{,}76 = 12 + h + c + c + h$.

Para calcular la medida de la altura del trapecio, que llamaremos «a», en el triángulo rectángulo que forma con el lado no básico del trapecio isósceles y parte de la base mayor, podremos aplicar el teorema de Pitágoras si calculamos la medida del lado no básico del trapecio isósceles (h) de la igualdad anterior del perímetro, pero primero tendríamos que calcular la medida de los catetos del triángulo rectángulo isósceles (c).

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171



Podemos calcular *c*, pues ahora tenemos los mismos datos que hemos utilizado en la 2.ª y 3.ª fases para hacer allí este cálculo, por lo tanto, haciendo lo mismo: c = 18,38 cm.

Entonces:

$P = 98{,}76 = 12 + h + c + c + h = 12 + h + 18{,}38 + 18{,}38 + h = 12 + 36{,}76 + 2 \cdot h = 48{,}76 + 2 \cdot h \rightarrow 2 \cdot h = 98{,}76 - 48{,}76 = 50 \text{ cm} \rightarrow h = 50 : 2 = 25 \text{ cm}$

Ahora, ya, aplicaremos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que forma la altura del trapecio isósceles con el lado no básico del trapecio y parte de la base mayor.

Para calcular la medida de la parte de la base mayor (x), como tenemos los mismos datos que hemos utilizado en la 2.ª y 3.ª fases, haciendo lo mismo que allí: x = 7 cm.

Entonces, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$a^2 + 7^2 = 25^2 \rightarrow a^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \text{ cm}^2 \rightarrow a = \sqrt{576} \text{ cm} = 24 \text{ cm}$; como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente igual que para el estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, lo que justificamos en la resolución con el alumnado indicando algunos de los contenidos utilizados, que podrían parecer impropios de Educación Primaria, a qué nivel/curso corresponden del bloque 4: «Geometría», del área de Matemáticas, según el decreto vigente que establece el currículo de Educación Primaria, el Decreto 108/2014.

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Cuadra de forma pentagonal, formada por un trapecio isósceles y un triángulo rectángulo isósceles, como indica la imagen.

- o La medida de la base menor del trapecio isósceles, 12 cm.
- o La medida de la altura del trapecio isósceles, 24 cm.
- o La medida de la base mayor del trapecio isósceles y de la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles, 26 cm.

- Incógnitas:

  - o Los metros lineales de valla que se necesitan para delimitar la cuadra, es decir, el perímetro del pentágono.

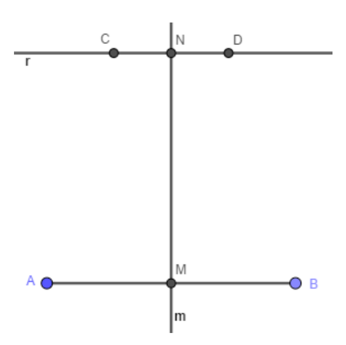
B) ¿El problema es resoluble?

Si podemos construir el pentágono, podremos medir el contorno y, por tanto, el problema será resoluble. Entonces veremos si con los datos dados se puede dibujar.

Trazamos un segmento de 26 cm de longitud de extremos «A» y «B», y su mediatriz («m»).

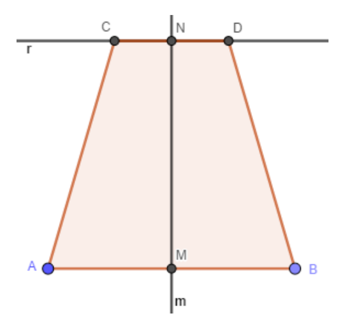
Desde el punto de corte de los elementos anteriores, que llamaremos «M», medimos 24 cm sobre la mediatriz y marcamos el punto «N».

Dibujamos una perpendicular a la mediatriz por el punto N, que llamamos «r», y en ella medimos 6 cm a un lado y al otro de N, marcando los puntos «C» y «D», que serán los extremos de un segmento, de longitud 12 cm, paralelo al segmento inicial AB.



Estos segmentos serán las bases de nuestro trapecio isósceles, siendo los puntos A, B, C y D los extremos de la base mayor y menor, respectivamente, del trapecio.

Uniendo los extremos del mismo lado de las bases del trapecio isósceles (respecto de la mediatriz) ya tenemos construido el trapecio.



ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Para dibujar el triángulo rectángulo isósceles haremos lo siguiente: al ser isósceles el triángulo los dos ángulos agudos son iguales y como la suma de los ángulos internos del triángulo es 180° (Decreto 108/2014, 6.º de Primaria, bloque 4: Geometría, contenido «Regularidades y simetrías: reconocimiento de regularidades»), además, por ser rectángulo el triángulo, cada uno de los dos ángulos agudos medirá 45°, entonces, con el semicírculo graduado trazaremos, desde los extremos de la base mayor del trapecio isósceles, dos semirrectas que forman 45° con la base, que, al cortarse, formarán el contorno del triángulo rectángulo isósceles

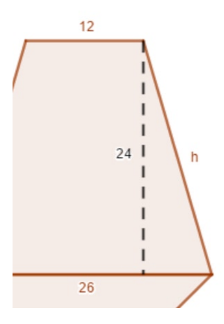


Hemos podido construir el pentágono con los datos del enunciado, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Para calcular el perímetro del pentágono, que llamaremos «P», con los datos que tenemos, solo necesitamos conocer la medida de los lados no básicos del trapecio isósceles y la medida de los catetos del triángulo rectángulo isósceles.

a) Para calcular la medida de los lados no básicos del trapecio isósceles, denominada «h», que son iguales por ser isósceles, aplicaremos el teorema de Pitágoras (justificado en el problema B.3) en el triángulo rectángulo que forma uno de ellos con la altura del trapecio y parte de la base mayor.

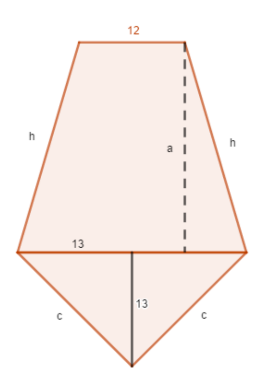


Se puede aplicar el teorema de Pitágoras porque, además de la medida del cateto vertical (24 cm) de este triángulo rectángulo considerado, podemos calcular la medida del cateto horizontal, que llamaremos «x», luego por ser el

trapecio isósceles, dicha medida es la mitad de la diferencia entre las medidas de las bases mayor y menor del trapecio.

b) Para calcular la medida de los catetos del triángulo rectángulo isósceles, denominada «c», veremos si estos segmentos podrían ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Al ser isósceles el triángulo rectángulo original, es simétrico respecto a la altura relativa a la hipotenusa. Al dibujar esta altura, parte el triángulo rectángulo isósceles en otros dos triángulos rectángulos iguales, que tienen como hipotenusa el segmento que es el cateto del triángulo rectángulo isósceles original (c). Luego veremos si en estos nuevos triángulos rectángulos podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de su hipotenusa (c).



Como el ángulo que tienen en común los nuevos triángulos rectángulos con el triángulo original es de 45°, hace que el otro ángulo agudo de ellos sea también de 45° (pues la suma de la medida de los ángulos internos de los triángulos es 180°), es decir, al partir el triángulo rectángulo isósceles original hemos obtenido dos triángulos rectángulos isósceles iguales.

Por ser isósceles estos nuevos triángulos, los dos catetos (el horizontal y el vertical) son iguales, y el cateto horizontal es, por la forma como hemos obtenido estos triángulos, la mitad de la hipotenusa del triángulo rectángulo original, por lo tanto, este cateto mide 13 cm, entonces, el cateto vertical también mide 13 cm.

Si sabemos cuánto miden los dos catetos de estos nuevos triángulos rectángulos podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de su hipotenusa (c).

c) Finalmente, calcularemos P sumando las medidas de todos los lados del contorno del pentágono.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $26 - 12 = 14$ cm $\rightarrow x = 14 : 2 = 7$ cm

$h^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \text{ cm}^2 \rightarrow h = \sqrt{625}$ cm = 25 cm

b) $13^2 + 13^2 = c^2 \rightarrow 169 + 169 = c^2 \rightarrow 338 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{338} = 18{,}38$ cm

c) $P = 12 + 25 + 18{,}38 + 18{,}38 + 25 = 98{,}76$ cm

Entonces, como la escala es 1:100, se necesitan 98,76 metros lineales de valla para delimitar la cuadra.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Haremos una estimación del perímetro a partir de los datos del enunciado.

Mirando la figura del problema, como la altura del trapecio isósceles mide 24 cm, el lado no básico tendrá que ser mayor, estimamos que podría ser de 25 cm. Como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles mide 26 cm, los catetos tienen que medir menos, estimamos que miden 20 cm, entonces, la estimación del perímetro sería: P = 12 + 25 + 20 + 20 + 25 = 102 cm, que no es tan diferente del valor que hemos encontrado, por tanto, la solución P = 98,76 cm creemos que es un valor razonable.

B) Comprobar la solución

Para hacer la comprobación, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Como hemos construido el pentágono, medimos su perímetro y nos da un poco más de 98 cm, pero menos de 99 cm, pues los lados del triángulo miden poco más de 18 cm, no llegan a 18,5 cm.

Entonces, el valor del perímetro que hemos calculado con las operaciones numéricas y el que hemos medido en la figura son prácticamente iguales, por lo que creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.12

Unos diseñadores de azulejos quieren pintar con esmalte un hexágono regular inscrito en una circunferencia, cuyo diámetro es el mismo que la diagonal de un cuadrado de 100 m² de área. Se preguntan cuántos metros cuadrados serán, para saber cuánta pintura deben encargar a la esmaltadora para poder pintarlo. ¿Los puedes ayudar calculando la cantidad de metros cuadrados?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Hexágono regular inscrito en una circunferencia.
  - El diámetro de la circunferencia es el mismo que la diagonal de un cuadrado de 100 m² de área.

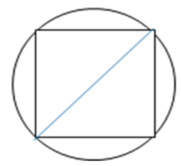
ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Incógnitas:
    - El área en metros cuadrados del hexágono regular.

B) ¿El problema es resoluble?

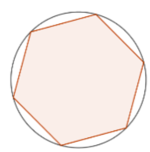
Si con los datos dados se pueden dibujar las figuras, el problema sería resoluble. Consideramos la escala 1:100, por lo que 1 centímetro en el dibujo corresponde a 1 metro en la realidad.

Al tener el área del cuadrado, podemos calcular la medida de los lados del cuadrado usando la fórmula del área ($A_C = q^2$) y, con una escuadra o un cartabón, o con programas de geometría dinámica, dibujaríamos el cuadrado, cuya diagonal es el diámetro de la circunferencia.



Construido el cuadrado, mediríamos la diagonal, y al dividir por dos obtendríamos la medida del radio, con lo que podremos dibujar la circunferencia, poniendo el puntero del compás en el punto medio de la diagonal.

Para dibujar el hexágono regular inscrito en la circunferencia, con el compás y con la abertura de trazar la circunferencia, ponemos la aguja del compás sobre cualquier punto de la circunferencia y trazamos dos arcos pequeños que cortan a la circunferencia, puntos de corte que con el punto de sujeción del compás determinan tres de los vértices del hexágono. Análogamente, haciendo centro con el compás en estos vértices, marcamos los tres vértices restantes. Uniendo con segmentos los vértices consecutivos obtendremos el contorno del hexágono regular inscrito en la circunferencia.



Hemos podido construir el hexágono regular inscrito en la circunferencia, entonces, podemos medir su superficie, calcular el área, recubriéndolo con decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados (de papel, de tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados, que finalmente contaríamos; por tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Para calcular el área del hexágono seguiremos los siguientes pasos:

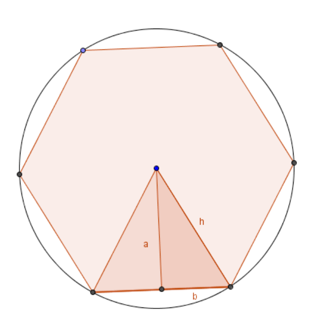
ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

a) Usaremos la expresión del área de un cuadrado para calcular la medida del lado, que llamaremos «q».
b) Posteriormente, por el teorema de Pitágoras, con el valor obtenido, calcularemos la medida de la diagonal del cuadrado, que llamaremos «d».
c) La medida del diámetro de la circunferencia, que llamaremos «D», es la misma que la de la diagonal del cuadrado (d). Calcularemos también la medida del radio de la circunferencia, que llamaremos «r».
d) El lado del hexágono regular inscrito en la circunferencia tiene la misma medida que el radio (r) de la circunferencia y la llamaremos «c».
e) Con este último dato, se tendrá que calcular el área del hexágono regular, la llamaremos A_H, mediante la fórmula:

$$A_H = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Calcularemos el perímetro del hexágono regular, que llamaremos «P», y la medida de la apotema, que denominaremos «a». La apotema coincide con la altura del triángulo equilátero de vértices, el centro de la circunferencia y dos vértices consecutivos del hexágono.



La medida de la altura la obtendríamos por el teorema de Pitágoras, aplicado en el triángulo rectángulo (más oscuro en la figura) que se forma al trazar la altura y que tiene como hipotenusa (llamaremos «h» a su medida) un segmento de la misma medida que el lado del hexágono y como cateto básico (llamaremos «b» a su medida) la mitad del lado del hexágono.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $100 \text{ m}^2 = q^2 \rightarrow q = 10 \text{ m}$

b) $d = \sqrt{10^2 + 10^2} \rightarrow d = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ m}$

c) $D = 14{,}14 \text{ m} \rightarrow r = \frac{14{,}14}{2} = 7{,}07 \text{ m}$

d) $c = r = 7{,}07 \text{ m}$

e) $P = 6 \cdot c = 6 \cdot 7{,}07 \text{ m} = 42{,}42 \text{ m}$

$h = c = 7{,}07 \text{ m}; \; b = \frac{c}{2} = \frac{7{,}07}{2} = 3{,}53 \text{ m}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$7{,}07^2 = 3{,}53^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 50 - 12{,}5 = 37{,}5 \text{ m}^2 \rightarrow a = \sqrt{37{,}5} \cong 6{,}12 \text{ m}$

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Por tanto, el área del hexágono regular inscrito en la circunferencia será:

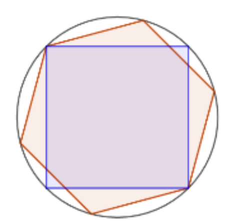
$$A_H = \frac{42{,}42 \cdot 6{,}12}{2} \cong 129{,}90 \text{ m}^2$$

Solución: los diseñadores de azulejos tienen que pintar 129,90 m^2.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Como se ve en la imagen, el círculo limitado por la circunferencia del enunciado del problema tiene más superficie que el hexágono regular y, este comprende más superficie que el cuadrado, es decir, la superficie del círculo es mayor que la del hexágono y la de este, mayor que la del cuadrado.



Pasando a los números, a las áreas, el área del círculo es $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 7{,}07^2 = 156{,}95$ m^2, la del hexágono, 129,90 m^2, y la del cuadrado, 100 m^2. Vemos que mantienen la misma relación que las correspondientes superficies, por lo que la solución del problema es razonable.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente». Duplicamos el área del cuadrado, con lo que tendríamos el nuevo problema: «*Unos diseñadores de azulejos quieren pintar con esmalte un hexágono regular, inscrito en una circunferencia, cuyo diámetro es el mismo que la diagonal de un cuadrado de 200 m^2 de área. Se preguntan, cuántos metros cuadrados serán, para saber cuánta pintura deben encargar a la esmaltadora para poder pintarlo. ¿Los puedes ayudar calculando la cantidad de metros cuadrados?*». Como el dato modificado ya es un área y la incógnita del problema también, la solución del nuevo problema será el doble que la solución del problema original, es decir, esperamos que la nueva solución, el área del hexágono regular inscrito en la circunferencia, sea: $2 \cdot 129{,}90 \text{ m}^2 = 259{,}80 \text{ m}^2$.

Hacemos simplemente los cálculos:

a) $200 \text{ m}^2 = q^2 \rightarrow q = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ m}$

b) $d = \sqrt{14{,}14^2 + 14{,}14^2} \rightarrow d = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$

c) $D = 20 \text{ m} \rightarrow r = \frac{20}{2} \text{ m} = 10 \text{ m}$

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

d) $c = 10\ m$

e) $P = 6 \cdot c = 6 \cdot 10\ m = 60\ m$

$h = c = 10\ m$; $b = \frac{c}{2} = \frac{10}{2}\ m = 5\ m$

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$10^2 = 5^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} \cong 8{,}66\ m$

Entonces, el área del hexágono regular inscrito en la circunferencia es:

$$A_H = \frac{60 \cdot \sqrt{75}}{2} \cong 259{,}80\ m^2$$

Como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

En el Decreto 108/2014 que establece el currículo de Educación Primaria, en el 4.º curso, en el bloque 4: Geometría, del área de Matemáticas, aparece el concepto de «Polígonos regulares».

Además, según el mismo decreto, en el 3.er curso, en el bloque 3: Dibujo geométrico, del área Educación Artística, encontramos el contenido «Construcción de polígonos a partir del lado y del radio de la circunferencia».

Ambas referencias justifican que el concepto «hexágono regular inscrito en una circunferencia», del enunciado del problema, debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 5.º y 6.º cursos de Educación Primaria, por lo que creemos que el problema se puede plantear en los últimos cursos de esta etapa escolar.

La resolución es prácticamente igual que para el estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, ya que como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria al aplicarlo para calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidas las medidas de los catetos ($h^2 = a^2 + b^2$), lo que hemos aplicado en la resolución de este problema y algunos otros.

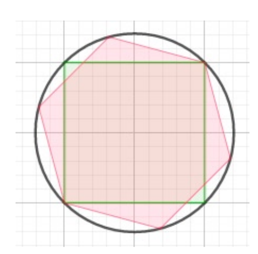
Pero, en este en concreto, también hemos aplicado el teorema para calcular la medida de un cateto conocidas la medida de la hipotenusa y la del otro cateto ($a^2 = h^2 - b^2$), lo que hemos justificado en el problema B.8; por tanto, al utilizar el teorema de Pitágoras de esta manera estamos aplicando conocimientos que el alumnado de 6.º curso debe de tener alcanzados.

Por todo esto la diferencia podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.



Como hemos dibujado el hexágono regular a escala 1:100, es decir, con el dato numérico del problema en centímetros cuadrados mediremos su superficie, calcularemos el área, recubriéndolo con centímetros cuadrados (de papel, de tela, etc.) o plantillas cuadriculadas en centímetros cuadrados, que contaríamos, y obtendríamos aproximadamente 129 o 130 cm^2, que «deshaciendo la escala» pasaremos a metros cuadrados, y serían 129 o 130 m^2, en la realidad.

Entonces, el valor del área que hemos calculado con las operaciones numéricas en la 3.ª fase y el que hemos obtenido experimentalmente, midiendo en la figura, son prácticamente iguales, por lo que creemos que el problema está bien resuelto.

Problema B.13

Unos diseñadores de azulejos quieren pintar con esmalte un hexágono irregular, inscrito en una circunferencia, cuyo diámetro es el mismo que la diagonal de un cuadrado de 100 m^2 de área. Se preguntan cuántos metros cuadrados serán, para saber cuánta pintura tienen que encargar a la esmaltadora para poder pintarlo. ¿Los puedes ayudar calculando la cantidad de metros cuadrados?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Hexágono irregular inscrito en una circunferencia.
  - El diámetro de la circunferencia es el mismo que la diagonal de un cuadrado de 100 m^2 de área.

- Incógnitas:

    - Metros cuadrados que tienen que pintar.

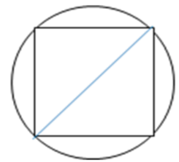
B) El problema es resoluble?

Si podemos construir el hexágono irregular inscrito en la circunferencia, podremos medir su superficie, calcular el área, recubriéndolo con decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados (de papel, de tela, etc.) o con plantillas cuadriculadas en decímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados, que finalmente contaríamos; por lo tanto, el problema sería resoluble.

Entonces, veremos si con los datos dados se puede dibujar.

Consideramos la escala 1:100, por lo que 1 centímetro en el dibujo corresponde a 1 metro en la realidad.

Al tener el área del cuadrado podemos calcular los lados del cuadrado usando la fórmula del área ($A_c = c^2$) y con una escuadra o un cartabón, o con programas de geometría dinámica, podemos dibujar el cuadrado, la diagonal del cual es el diámetro de la circunferencia.

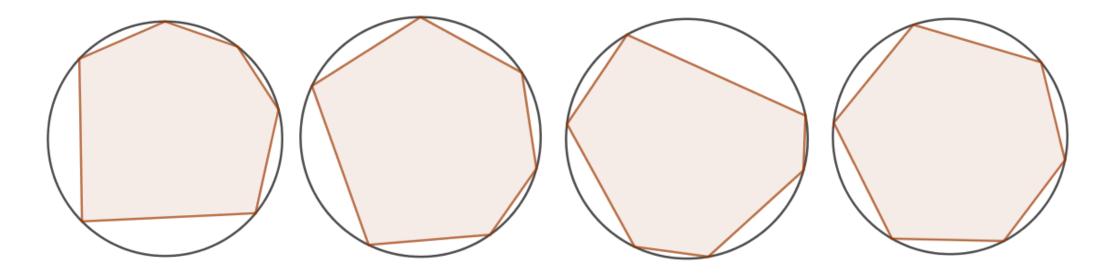


Construido el cuadrado, mediríamos la diagonal, y al dividir por dos obtendríamos la medida del radio, con lo que podremos dibujar la circunferencia.

Para dibujar un hexágono inscrito en la circunferencia, elegimos seis puntos de la circunferencia, que serán los vértices del hexágono y, para que sea irregular, lo haremos de manera que los puntos no sean equidistantes. Eligiendo un sentido de giro en la circunferencia, uniremos cada uno de estos puntos con el anterior y posterior, respectivamente, y obtendremos un total de 6 lados, que formarán el contorno del hexágono irregular inscrito en la circunferencia.

Finalmente, mediríamos la superficie del hexágono irregular.

Como la circunferencia tiene infinitos puntos, serían infinitos los «conjuntos de 6 puntos de la circunferencia no equidistantes» para dibujar los lados de hexágonos irregulares. En la figura podemos ver algunos de ellos.



Al haber infinitos hexágonos irregulares inscritos en la circunferencia, hace que no podamos calcular las áreas de todos ellos, es decir, no podemos saber si calculamos concretamente el área del hexágono irregular inscrito en la circun-

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

ferencia que han hecho los diseñadores; por tanto, no sabemos si les podemos ayudar, entonces, el problema es irresoluble.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

En el problema B.12 hemos justificado que en el currículum de Educación Primaria, para el alumnado de 4.º curso, aparece el concepto de «Polígonos regulares» y, para el de 3.er curso, el contenido «Polígonos inscritos en la circunferencia».

La primera referencia justifica la presencia del concepto «Polígono irregular» y, este hecho, junto a la segunda referencia, que «hexágono irregular inscrito en una circunferencia» deba figurar entre los saberes del alumnado de 5.º y 6.º curso de Educación Primaria.

Por lo que pensamos que el problema se puede plantear en los últimos cursos de esta etapa escolar, y que la resolución podría ser igual que para el estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Tema 3. Problemas de números naturales-Sistema de Numeración Decimal

3.1. Introducción

«Números naturales. Sistemas de numeración» es el título del tema 3 de la asignatura MP1006 Didáctica de las Matemáticas I (UJI, Plan de Estudios 2010) o MP1806 Didáctica de las Matemáticas I (reforma/modificación de 2018); pues bien, en este tercer tema aparecen los problemas en los que en la resolución utilizamos la descomposición polinómica de los números naturales, por lo que además de trabajar la RPM esperamos complementar la explicación dada en el tema 1 de Alcalde, Pérez y Lorenzo (2014) donde se desarrolla el contenido de las referidas asignaturas, y ayudar a conseguir en el estudiantado y/o en el alumnado una mejor comprensión de cómo están compuestos los números.

Generalmente son problemas con numerales de dos cifras, para evitar que sea demasiado pesada la resolución, pero también hay algún problema en el que llegamos a los de tres cifras.

3.2. Problemas

Problema C.1

Una niña de 5.º nivel de Educación Primaria en el curso académico 2019-2020, que no ha cumplido años en 2020, le pregunta a su maestro qué edad tiene y este le responde: «Si sumamos las dos cifras da tu edad y, además, si cambiamos el orden de las cifras con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando». ¿Qué edad tiene el maestro?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La edad del maestro es un número de dos cifras.
  - La niña hace 5.º nivel de Educación Primaria en el curso académico 2019-2020 y no ha cumplido años en 2020.
  - Si sumamos las cifras de la edad del maestro da la edad de la niña.
  - Si cambiamos el orden de las cifras de la edad del maestro con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando.

- Incógnitas:
  - La edad del maestro.

B) ¿El problema es resoluble?

Probaremos haciendo tanteos, si se pueden dar los datos del enunciado.

Como los niños y niñas que hacen 5.º curso de Educación Primaria en el año escolar 2019-2020 en 2019 cumplen 10 años, y la niña en 2020 no ha cumplido años, en 2020 sigue teniendo 10 años, por lo tanto, la suma de las cifras de la edad del maestro es 10.

Si las dos cifras suman 10, podrían ser (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6) o (5, 5) formando los números 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

19 no es una edad posible para un maestro de Educación Primaria.

Además, como todavía es maestro, no está jubilado, su edad es inferior o igual a 65 años, por tanto, 91, 82 y 73 no son edades posibles del maestro.

Por otro lado, si cambiamos el orden de las cifras con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando, es decir, el nuevo número tiene que ser inferior o igual a 65 años, entonces, descartamos también 28 y 37. Por lo tanto, tenemos las siguientes posibilidades: 46, 64 y 55 años.

Probemos si estos números cumplen los datos del problema:

Si la edad fuera 46 años, 46 es un número de dos cifras, 4 + 6 = 10 y si invertimos el orden de sus cifras da 64, edad en la que todavía puede trabajar. Es decir, cumple los datos del problema, luego, 46 años es una solución y, por ello, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo para ver si la solución es única.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Si la edad fuera 55 años, 55 es un número de dos cifras, 5 + 5 = 10 y si invertimos el orden de sus cifras da 55, edad en la que todavía puede trabajar. Es decir, cumple los datos del problema, entonces, 55 años es una solución.

Si la edad fuera 64 años, 64 es un número de dos cifras, 6 + 4 = 10, y si invertimos el orden de sus cifras da 46, edad en la que todavía puede trabajar. También cumple los datos del problema, luego, 64 años es una solución.

Las tres edades, 46, 55 y 64, cumplen los datos del problema, por lo que no podemos determinar concretamente la edad del maestro, por tanto, la niña no puede saber cuál es la edad del maestro con certeza.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que son números de dos cifras y edades posibles para un maestro en activo.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, vamos a aplicar el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos las posibles edades del maestro 46, 64 y 55 años (eran incógnita y pasan a ser dato en el nuevo problema) y vamos a calcular cuánto suman sus cifras y a ver si, cambiando el orden de las cifras, con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En las edades 46, 55 y 64 años, si sumamos las dos cifras ¿cuánto da? y, además, ¿si cambiamos el orden de las cifras con esa nueva edad el maestro todavía podría continuar trabajando?*». Esperamos que las respuestas sean, respectivamente, 10 y sí.

- Si la edad es 46 años, 4 + 6 = 10 y, además, si invertimos el orden de sus cifras es 64, por lo que sí podría continuar trabajando.
- Si la edad es 55 años, 5 + 5 = 10 y, además, si invertimos el orden de sus cifras es 55, por lo que sí podría continuar trabajando.
- Si la edad es 64 años, 6 + 4 = 10 y, además, si invertimos el orden de sus cifras es 46, por lo que sí podría continuar trabajando.

Como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La edad del maestro es un número de dos cifras.
  - La niña hace 5.º nivel de Educación Primaria en el curso académico 2019-2020 y no ha cumplido años en 2020.
  - Si sumamos las cifras de la edad del maestro da la edad de la niña.
  - Si cambiamos el orden de las cifras de la edad del maestro con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando.

- Incógnitas:
  - La edad del maestro.

B) ¿El problema es resoluble?

Probaremos haciendo tanteos, si se pueden dar los datos del enunciado.

Como los niños y niñas que hacen 5.º curso de Educación Primaria en el año escolar 2019-2020 en 2019 cumplen 10 años, y la niña en 2020 no ha cumplido años, en 2020 sigue teniendo 10 años, por lo tanto, la suma de las cifras de la edad del maestro es 10.

El segundo dato nos dice que las dos cifras suman 10, entonces, los números podrían ser: 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

Descartamos el 19, pues no es una edad posible para un maestro. También descartamos los números: 91, 82 y 73, ya que a esas edades un maestro ya está jubilado.

Nos quedan los números: 28, 37, 46, 64 y 55.

Haremos pruebas con estos números, que recogemos en una tabla:

Edad maestro	Edad maestro cambiando el orden de las cifras	¿Edad maestro cambiando el orden de las cifras ≤ 65 años?
28	82	NO
37	73	NO
46	64	SÍ

Vemos que es resoluble, pues hemos encontrado una solución.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Agotaremos el tanteo para ver si hay más soluciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Edad maestro	Edad maestro cambiando el orden de las cifras	¿Edad maestro cambiando el orden de las cifras ≤ 65 años?
28	82	NO
37	73	NO
46	64	SÍ
64	46	SÍ
55	55	SÍ

Entonces, la edad del maestro podría ser 46 años, 64 años o 55 años, luego no podemos determinar la edad concreta del maestro, por tanto, la niña no puede saber cuál es la edad del maestro con certeza.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues son números de dos cifras y edades posibles para un maestro.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos viendo si se cumplen los datos del enunciado con cada una de las soluciones encontradas:

Si la edad del maestro es 46 años:

- ¿La edad del maestro es un número de dos cifras? 46, sí.
- La niña hace 5.º nivel de Educación Primaria en el curso académico 2019-2020 y no ha cumplido años en 2020, luego tiene 10 años.
- ¿Si sumamos las cifras de la edad del maestro da la edad de la niña? 4 + 6 = 10, sí.
- ¿Si cambiamos el orden de las cifras de la edad del maestro con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando?, es decir, ¿el nuevo número es inferior o igual a 65 años? 64, sí.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Si la edad del maestro es 64 años:

- ¿La edad del maestro es un número de dos cifras? 64, sí.
- La niña hace 5.º nivel de Educación Primaria en el curso académico 2019-2020 y no ha cumplido años en 2020, luego tiene 10 años.
- ¿Si sumamos las cifras de la edad del maestro da la edad de la niña? 6 + 4 = 10, sí.
- ¿Si cambiamos el orden de las cifras de la edad del maestro con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando?, es decir, ¿el nuevo número es inferior o igual a 65 años? 46, sí.

Si la edad del maestro es 55 años:

- ¿La edad del maestro es un número de dos cifras? 55, sí.
- La niña hace 5.º nivel de Educación Primaria en el curso académico 2019-2020 y no ha cumplido años en 2020, luego tiene 10 años.
- ¿Si sumamos las cifras de la edad del maestro da la edad de la niña? 5 + 5 = 10, sí.
- ¿Si cambiamos el orden de las cifras de la edad del maestro con esa nueva edad todavía podría continuar trabajando?, es decir, ¿el nuevo número es inferior o igual a 65 años? 55, sí.

Los números 46, 64 y 55 verifican los datos del enunciado, por lo tanto, el problema está bien resuelto.

Problema C.2

Un estudiante de Matemáticas le pregunta a una dependienta el precio de una chaqueta, a lo que esta le responde: «El precio es un número de dos cifras, de manera que si se suman las cifras nos da 9, y si se cambia el orden de estas el número aumenta 9 unidades». El cliente no sabía que la dependienta era la mujer de un matemático. ¿Cuál es el precio de la chaqueta?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El precio es un número de dos cifras.
  - Si se suman las cifras, nos da 9.
  - Si se cambia el orden de las cifras, el número aumenta en 9 unidades.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Incógnitas:
  - El precio de la chaqueta.

B) ¿El problema es resoluble?

Como el precio que buscamos es un número de dos cifras y los datos se refieren precisamente a las cifras que forman el número, realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades, por lo que la expresión polinómica del número buscado es: $10 \cdot D + U$.

El número que resulta de invertir el orden de las cifras del precio tiene como expresión polinómica $10 \cdot U + D$.

Los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D = (10 \cdot D + U) + 9 \end{array}\right\}.$$

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D = (10 \cdot D + U) + 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D - (10 \cdot D + U) = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D - 10 \cdot D - U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ -9D + 9U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ -D + U = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 2U = 10 \end{array}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble, y como «U» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{array}{c} D + U = 9 \\ 10 \cdot U + D = (10 \cdot D + U) + 9 \end{array}\right\}$ al triangularizarlo lo hemos convertido en $\left\{\begin{array}{l} D + U = 9 \\ 2U = 10 \end{array}\right\}$.

De la ecuación $2U = 10$, obtenemos $U = 5$.

Sustituyendo en la otra ecuación: $D + U = 9 \rightarrow D + 5 = 9 \rightarrow D = 9 - 5 = 4$.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{array}{l} D+U=9 \\ 10 \cdot U+D=(10 \cdot D+U)+9 \end{array}\right\}$ está bien resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{\begin{array}{l} D+U=4+5=9 \\ \left\{\begin{array}{l} 10U+D=10 \cdot 5+4=50+4=54 \\ (10D+U)+9=(10 \cdot 4+5)+9=(40+5)+9=45+9=54 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y la solución del problema es: 10 · D + U = 10 · 4 + 5 = 45, luego el precio de la chaqueta es de 45 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de dos cifras y, además, es un precio posible para una chaqueta.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, por tanteo.

Las dos cifras suman 9, por lo tanto, podrán ser (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) formando, respectivamente, los números 18, 81; 27, 72; 36, 63; 45, 54.

Como al cambiar el orden de las cifras el número aumenta en 9 unidades, es mayor que el número inicial, por lo que, de las parejas de números que genera cada par de cifras que suman 9, las posibles soluciones serian: 18, 27, 36 y 45.

Las diferencias que tenemos entre el número que resulta de invertir las cifras y el inicial son: 81 – 18 = 63; 72 – 27 = 45; 63 – 36=27; 54 – 45 = 9.

El único número que verifica el aumento en 9 unidades es 45. Por tanto, el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El precio es un número de dos cifras.
  - Si se suman las cifras, nos da 9.
  - Si se cambia el orden de las cifras, el número aumenta en 9 unidades.

- Incógnitas:

    - El precio de la chaqueta.

B) ¿El problema es resoluble?

Haremos pruebas para ver si se pueden satisfacer los datos del enunciado.

El número que buscamos es de dos cifras y la suma de estas es 9. Entonces, realizaremos un tanteo con números cuyas cifras suman 9, por lo tanto, podrán ser: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 o 90.

Como al cambiar el orden de las cifras el número aumenta en 9 unidades, el número es mayor que el número inicial, por tanto, las posibles soluciones serian: 18, 27, 36 o 45.

Recogeremos las pruebas en una tabla:

Número	Número cambiando el orden de las cifras	Número aumentado en 9 unidades	¿Si se cambia el orden de las cifras, el número aumenta en 9 unidades?
18	81	18 + 9 = 27	NO
27	72	27 + 9 = 36	NO
36	63	36 + 9 = 45	NO

Vemos que el número con las cifras cambiadas de orden cada vez se aproxima más al número inicial más 9 unidades, por lo que creemos que, posiblemente, el problema sea resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo del apartado anterior.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	Número cambiando el orden de las cifras	Número aumentado en 9 unidades	¿Si se cambia el orden de las cifras, el número aumenta en 9 unidades?
18	81	18 + 9 = 27	NO
27	72	27 + 9 = 36	NO
36	63	36 + 9 = 45	NO
45	54	45 + 9 = 54	SÍ

Hemos encontrado la solución, luego el precio de la chaqueta es 45 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de dos cifras y, además, es un precio posible para una chaqueta.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿El precio es un número de dos cifras? Es 45 €. Sí.
- ¿Si se suman las cifras, nos da 9? 4 + 5 = 9. Sí.
- ¿Si se cambia el orden de las cifras, el número aumenta en 9 unidades? 54 = 45 + 9. Sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema C.3

Calcula un número de dos cifras sabiendo que la suma de estas es 15 y que si intercambiamos el orden de las cifras, la diferencia entre el inicial y este nuevo número es de 9 unidades.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El número tiene dos cifras.
  - La suma de las cifras es 15.
  - Si intercambiamos el orden de las cifras, la diferencia entre el inicial y este nuevo número es de 9 unidades.
- Incógnitas:
  - Un número de dos cifras.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) ¿El problema es resoluble?

Como el precio que buscamos es un número de dos cifras y los datos se refieren precisamente a las cifras que forman el número, realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades, por lo que la expresión polinómica del número buscado es: 10 · D + U.

El número que resulta de invertir el orden de las cifras del precio tiene como expresión polinómica 10 · U + D.

Los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 10D + U - 10U - D = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 9D - 9U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ D - U = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 2D = 16 \end{array}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «D» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ 2D = 16 \end{array}\right\}$.

De la ecuación 2D = 16, obtenemos D = 8.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: D + U = 15 → 8 + U = 15 → → U = 15 – 8 → U = 7.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{array}{l} D + U = 15 \\ (10 \cdot D + U) - (10 \cdot U + D) = 9 \end{array}\right\}$ está bien resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{\begin{array}{l} D + U = 8 + 7 = 15 \\ (10D + U) - (10U + D) = (10 \cdot 8 + 7) - (10 \cdot 7 + 8) = 87 - 78 = 9 \end{array}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y la solución del problema es: 10 · D + U = 10 · 8 + 7 = 87.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

La solución es razonable, ya que el número es de dos cifras.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, por tanteo.

Las posibilidades que tenemos, dado que las dos cifras del número tienen que sumar 15, son: 96, 87, 78 o 69.

Del dato «si intercambiamos el orden de las cifras, la diferencia entre el inicial y este nuevo número es de 9 unidades», deducimos que el minuendo tiene que ser mayor que el sustraendo, por lo que, en el número buscado, la cifra de las decenas tendrá que ser mayor que la de las unidades, por tanto, solo nos quedan dos de las opciones anteriores: 96 y 87.

Las diferencias que tenemos entre el número inicial y el que resulta de invertir el orden de sus cifras son: 96 – 69 = 27; 87 – 78 = 9.

El único número que verifica que la diferencia es 9 es el 87. Por tanto, el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El número tiene dos cifras.
  - La suma de las cifras es 15.
  - Si intercambiamos el orden de las cifras, la diferencia entre el inicial y este nuevo número es de 9 unidades.
- Incógnitas:
  - Un número de dos cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

El número que buscamos es de dos cifras y la suma de estas es 15. Entonces, realizaremos un tanteo con números cuyas cifras suman 15, que podrán ser: 96, 87, 78 o 69.

Recogemos el tanteo en una tabla:

Número	Número intercambiando el orden de las cifras	Diferencia entre el número y el número intercambiando el orden de las cifras	¿La diferencia entre el número y el número intercambiando el orden de las cifras = 9?
96	69	96 – 69 = 27	NO
87	78	87 – 78 = 9	SÍ

Hemos encontrado una solución, 87, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo para ver si encontramos otra solución.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	Número intercambiando el orden de las cifras	Diferencia entre el número y el número intercambiando el orden de las cifras	¿La diferencia entre el número y el número intercambiando el orden de las cifras = 9?
96	69	96 – 69 = 27	NO
87	78	87 – 78 = 9	SÍ
78	87	78 – 87 = – 9	NO
69	96	69 – 96 = – 27	NO

Por lo tanto, excepto 87, no encontramos ninguna otra solución. Luego la solución del problema es el número 87.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de dos cifras.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución verifica los datos del enunciado del problema:

- ¿El número tiene dos cifras? 87, sí.
- ¿La suma de las cifras es 15? 8 + 7 = 15, sí.
- ¿Si intercambiamos el orden de las cifras, la diferencia entre el inicial y este nuevo número es de 9 unidades? 87 – 78 = 9, sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema C.4

Un niño de 6.º nivel de Educación Primaria le pregunta a su maestra qué edad tiene y esta le responde: «Es un número que si sumamos sus dos cifras da 10, y que si invertimos el orden de las cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial». ¿Qué edad tiene la maestra?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas:

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras.
  - Si sumamos sus dos cifras da 10.
  - Si invertimos el orden de las cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial.
- Incógnitas:
  - La edad de la maestra.

B) ¿El problema es resoluble?

Como la edad que buscamos es un número de dos cifras y los datos se refieren precisamente a las cifras que forman el número, realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades del número en cuestión.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades, por lo que la expresión polinómica del número buscado es: $10 \cdot D + U$.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

El número que resulta de invertir el orden de las cifras de la edad tiene como expresión polinómica $10 \cdot U + D$.

Los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ 10U + D - 10D - U = 36 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ -9D + 9U = 36 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ -D + U = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ 2U = 14 \end{matrix}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «U» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ 2U = 14 \end{matrix}\right\}$.

De la ecuación $2U = 14$, obtenemos $U = 7$.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: $D + U = 10 \rightarrow D + 7 = 10 \rightarrow$ $\rightarrow D = 10 - 7 \rightarrow D = 3$.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 10 \\ 10 \cdot U + D = 36 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$ está bien resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 3 + 7 = 10 \\ \left\{\begin{matrix} 10 \cdot U + D = 10 \cdot 7 + 3 = 70 + 3 = 73 \\ 36 + (10 \cdot D + U) = 36 + (10 \cdot 3 + 7) = 36 + 37 = 73 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y la solución del problema es: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 3 + 7 = 37$, luego la edad de la maestra es 37 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras y es una edad razonable para una maestra.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, por tanteo.

Las dos cifras suman 10, por tanto, podrán ser (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6) o (5, 5), formando, respectivamente, los números: 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

Pero, por un lado, 19 no es una edad posible de una maestra de Educación Primaria y, por otro, como al invertir el orden de las cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial, la cifra de las unidades de la edad es mayor que la de las decenas, por tanto, las posibles soluciones serán: 28, 37 o 46.

Las diferencias que tenemos entre el número que resulta de invertir el orden de las cifras y el inicial son: 82 – 28 = 54; 73 – 37 = 36; 64 – 46=18.

El único número que verifica el aumento dado es 37. Por tanto, el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas:

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras.
  - Si sumamos sus dos cifras da 10.
  - Si invertimos el orden de las cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial.
- Incógnitas:
  - La edad de la maestra.

B) ¿El problema es resoluble?

El número que buscamos es de dos cifras y la suma de estas es 10. Entonces, realizaremos un tanteo con números cuyas cifras suman 10, por lo tanto, podrán ser: 19, 91; 28, 82; 37, 73; 46, 64 o 55.

El 19 no es una edad posible de una maestra de Educación Primaria; por otro lado, como al invertir el orden de las cifras el nuevo número tiene que ser mayor que el inicial, la cifra de las unidades de la edad es mayor que la de las decenas; por tanto, descartamos 91, 82, 73, 64 y 55, luego las posibles soluciones serán: 28, 37 o 46.

Recogemos en una tabla las pruebas realizadas:

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Número	Número más 36	Número con las cifras invertidas de orden	¿Si invertimos el orden de las cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial?
28	28 + 36 = 64	82	NO
37	37 + 36 = 73	73	SÍ

Hemos encontrado una solución, 37, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo para ver si encontramos otra solución.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	Número más 36	Número con las cifras invertidas de orden	¿Si invertimos el orden de las cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial?
28	28 + 36 = 64	82	NO
37	37 + 36 = 73	73	SÍ
46	46 + 36 = 82	64	NO

Por lo tanto, excepto 37, no encontramos ninguna otra solución. Luego la solución del problema: la edad de la maestra es 37 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras y es una edad razonable para una maestra.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿La edad es un número de dos cifras? 37. Sí.
- ¿Si sumamos sus dos cifras da 10? 3 + 7 = 10. Sí.
- ¿Si invertimos el orden de las cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial? 73, 36 + 37 = 73. Sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema C.5

Un niño le pregunta a su abuelo, que era matemático, qué edad tiene, a lo que este le responde: «Es un número de dos cifras, de manera que la cifra de las decenas es el doble que la de las unidades y, por otro lado, si invertimos el orden de las cifras del número, el doble del nuevo número, menos nueve unidades, es mi edad». ¿Qué edad tiene el abuelo?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras.
  - La cifra de las decenas es el doble que la de las unidades.
  - Si invertimos el orden de las cifras del número, el doble del nuevo número, menos nueve unidades, es la edad.
- Incógnitas:
  - La edad del abuelo.

B) ¿El problema es resoluble?

Como la edad que buscamos es un número de dos cifras y los datos se refieren precisamente a las cifras que forman el número, realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades, por lo que la expresión polinómica del número buscado es $10 \cdot D + U$.

El número que resulta de invertir el orden de las cifras de la edad tiene como expresión polinómica $10 \cdot U + D$.

Los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D - 2U = 0 \\ 20U + 2D - 9 = 10D + U \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} D - 2U = 0 \\ 20U + 2D - 10D - U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D - 2U = 0 \\ -8D + 19U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 8D - 16U = 0 \\ -8D + 19U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 8D - 16U = 0 \\ 3U = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D - 2U = 0 \\ 3U = 9 \end{array}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «U» va a ser un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{array}{l} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{array}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{array}{l} D - 2U = 0 \\ 3U = 9 \end{array}\right\}$.

De la ecuación $3U = 9$, obtenemos $U = 3$.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: $D - 2 \cdot 3 = 0 \rightarrow D = 2 \cdot 3 = 6$.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{array}{l} D = 2 \cdot U \\ 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 10 \cdot D + U \end{array}\right\}$ está bien resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{\begin{array}{l} D = 6;\ 2 \cdot U = 2 \cdot 3 = 6 \\ \left\{\begin{array}{l} 2 \cdot (10 \cdot U + D) - 9 = 2 \cdot (10 \cdot 3 + 6) - 9 = 2 \cdot 36 - 9 = 72 - 9 = 63 \\ 10 \cdot D + U = 10 \cdot 6 + 3 = 60 + 3 = 63 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y la solución del problema es: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 6 + 3 = 63$, luego, la edad del abuelo es 63 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras, y es una edad posible para su abuelo.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, por tanteo.

Como la cifra de las decenas es el doble que la de las unidades, tendrá que ser un número par: 2, 4, 6 u 8, luego la edad del abuelo podrá ser 84, 63, 42 o 21. Descartamos 21 por no ser una edad posible de una persona que es abuelo. Entonces, las edades podrán ser 84, 63 o 42.

Comprobamos si alguna de ellas cumple el tercer dato:

- Si la edad fuera 84 años: $2 \cdot 48 - 9 = 96 - 9 = 87 \neq 84$, luego 84 años no es solución.
- Si la edad fuera 63 años: $2 \cdot 36 - 9 = 72 - 9 = 63$, por tanto, 63 años es solución.
- Si la edad fuera 42 años: $2 \cdot 24 - 9 = 48 - 9 = 39 \neq 42$, luego 42 años no es solución.

Entonces, 63 es el número buscado.

Que es la misma solución que habíamos obtenido, por tanto, el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras.
  - La cifra de las decenas es el doble que la de las unidades.
  - Si invertimos el orden de las cifras del número, el doble del nuevo número menos nueve unidades es la edad.
- Incógnitas:
  - La edad del abuelo.

B) ¿El problema es resoluble?

Comprobaremos si, considerando números de dos cifras en los que la cifra de las decenas es el doble que la de las unidades, alguno de ellos cumple el tercer dato.

Recogeremos las pruebas en una tabla:

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Número	Doble del número con las cifras cambiadas de orden, menos nueve	¿El doble del número con las cifras cambiadas de orden, menos nueve, es el número inicial?
84	2 · 48 – 9 = 87	NO
63	2 · 36 – 9 = 63	SÍ

Hemos encontrado una solución, 63, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo para ver si encontramos otra solución.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	Doble del número con las cifras cambiadas de orden, menos nueve	¿El doble del número con las cifras cambiadas de orden, menos nueve, es el número inicial?
84	2 · 48 – 9 = 87	NO
63	2 · 36 – 9 = 63	SÍ
42	2 · 24 – 9 = 39	NO
21	2 · 12 – 9 = 15	NO

Por lo tanto, excepto 63, no encontramos ninguna otra solución. Luego la solución del problema es que la edad de su abuelo es de 63 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras y es una edad posible para su abuelo.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿La edad es un número de dos cifras? 63. Sí.
- ¿La cifra de las decenas es el doble que la de las unidades? 6 = 2 · 3. Sí.
- ¿Si invertimos el orden de las cifras del número, el doble del nuevo número, menos nueve unidades, es la edad? 2 · 36 – 9 = 72 – 9 = = 63. Sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema C.6

En el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad ha entrado una profesora, graduada en Matemáticas. Una compañera le pregunta la edad y, como la conversación es entre matemáticas, le responde que «la suma de las cifras de mi edad es siete y, el doble de mi edad es diez veces la cifra de las unidades». ¿Qué edad tiene?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas:

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras, pues se trata de una persona que ha hecho una carrera universitaria.
  - Las cifras de la edad suman 7.
  - El doble de la edad es igual a 10 veces la cifra de las unidades.
- Incógnitas:
  - La edad de la profesora contratada.

B) ¿El problema es resoluble?

Como la edad que buscamos es un número de dos cifras y los datos se refieren precisamente a las cifras que forman el número, realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades del número en cuestión.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades, por lo que la expresión polinómica del número buscado es $10 \cdot D + U$.

Los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones $\left.\begin{cases} D + U = 7 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 10 \cdot U \end{cases}\right\}$.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\begin{cases} D + U = 7 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 10 \cdot U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D + U = 7 \\ 20D + 2U = 10U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D + U = 7 \\ 20D - 8U = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} D + U = 7 \\ 5D - 2U = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2D + 2U = 14 \\ 5D - 2U = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2D + 2U = 14 \\ 7D = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D + U = 7 \\ 7D = 14 \end{cases}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «D» será un número de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\begin{cases} D + U = 7 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 10 \cdot U \end{cases}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\begin{cases} D + U = 7 \\ 7D = 14 \end{cases}$.

De la ecuación 7D = 14, obtenemos D = 2.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: 2 + U = 7 → U = 7 – 2 = 5.

Comprobamos que el sistema $\begin{cases} D + U = 7 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 10 \cdot U \end{cases}$ está bien resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\begin{cases} D + U = 2 + 5 = 7 \\ \begin{cases} 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 2 \cdot (10 \cdot 2 + 5) = 2 \cdot 25 = 50 \\ 10 \cdot U = 10 \cdot 5 = 50 \end{cases} \end{cases}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto, y la solución del problema es: 10 · D + U = 10 · 2 + 5 = 25, luego la edad de la profesora contratada es 25 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras y, además, es una edad razonable para una profesora.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, por tanteo.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Las dos cifras suman 7, entonces podrán ser (0, 7), (1, 6), (2, 5) o (3, 4), formando, respectivamente, los números: 07, 70; 16, 61; 25, 52, y 34, 43.

Pero 07 se escribe 7, que no es número de dos cifras, 70 es la edad de jubilación forzosa del profesorado universitario, por lo que no podría estar en activo. Además, 16 no es una edad posible de una graduada.

Por tanto, las posibles soluciones son: 61, 52, 43, 34 o 25.

Recogemos el tanteo con estos números en una tabla:

$10 \cdot D + U$	$2 \cdot (10 \cdot D + U)$	$10 \cdot U$	$¿2 \cdot (10 \cdot D + U) = 10 \cdot U?$
61	$2 \cdot 61 = 122$	$10 \cdot 1 = 10$	NO
52	$2 \cdot 52 = 104$	$10 \cdot 2 = 20$	NO
43	$2 \cdot 43 = 86$	$10 \cdot 3 = 30$	NO
34	$2 \cdot 34 = 68$	$10 \cdot 4 = 40$	NO
25	$2 \cdot 25 = 50$	$10 \cdot 5 = 50$	SÍ

Entonces, 25 es el número buscado.

Que es la misma solución que habíamos obtenido, por tanto, el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas:

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras, pues se trata de una persona que ha hecho una carrera universitaria.
  - Las cifras de la edad suman 7.
  - El doble de la edad es igual a 10 veces la cifra de las unidades.
- Incógnitas:
  - La edad de la persona contratada.

B) ¿El problema es resoluble?

Comprobemos si, considerando números de dos cifras cuyas cifras sumen 7, alguno de ellos cumple el tercer dato.

Como las cifras del número suman 7, podrán ser: 70, 61, 52, 43, 34 o 25.

Recogemos los resultados en una tabla:

Edad	Doble de la edad	10 veces la cifra de las unidades	¿Doble de la edad es igual a 10 veces la cifra de las unidades?
70	2 · 70 = 140	10 · 0 = 0	NO
61	2 · 61 = 122	10 · 1 = 10	NO
52	2 · 52 = 104	10 · 2 = 20	NO
43	2 · 43 = 86	10 · 3 = 30	NO

Vemos que el doble de la edad y el valor de 10 veces la cifra de las unidades, cada vez se aproximan más, por lo que creemos que, posiblemente, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo del apartado anterior.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Edad	Doble de la edad	10 veces la cifra de las unidades	¿Doble de la edad es igual a 10 veces la cifra de las unidades?
70	2 · 70 = 140	10 · 0 = 0	NO
61	2 · 61 = 122	10 · 1 = 10	NO
52	2 · 52 = 104	10 · 2 = 20	NO
43	2 · 43 = 86	10 · 3 = 30	NO
34	2 · 34 = 68	10 · 4 = 40	NO
25	2 · 25 = 50	10 · 5 = 50	SÍ

Entonces, 25 es el número buscado. Luego la edad de la profesora contratada es de 25 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras y, además, es una edad razonable para una profesora.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿La edad es un número de dos cifras? 25. Sí.
- ¿Las cifras de la edad suman 7? 2 + 5 = 7. Sí.
- ¿El doble de la edad es igual a 10 veces la cifra de las unidades? $2 \cdot 25 = 50 = 10 \cdot 5$. Sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

Problema C.7

¿Cuál es el número de tres cifras comprendido entre 900 y 1.000, que al invertir el orden de las cifras resulta un número 99 unidades menor que el original y que al sumar sus cifras nos da 18?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de tres cifras comprendido entre 900 y 1.000.
  - Al invertir el orden de las cifras del número resulta un número 99 unidades menor que el original.
  - Al sumar sus cifras nos da 18.

- Incógnitas:

  - Un número de tres cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

Se busca un número de tres cifras y los datos se refieren a las cifras que lo forman, por lo que realmente tenemos como incógnitas las cifras, pero como nos dicen que el número está comprendido entre 900 y 1.000, la cifra de las centenas será 9, por lo que no tenemos tres incógnitas sino solo dos. Si a la cifra de las decenas le llamamos «D» y la de las unidades de primer orden «U», entonces, la descomposición polinómica del número sería 100 · 9 + 10 · D + U.

El número que resulta de invertir el orden de las cifras tiene como expresión polinómica 100 · U + 10 · D + 9.

Los datos del enunciado del problema los traducimos en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} 100\cdot U + 10\cdot D + 9 = (100\cdot 9 + 10\cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{matrix}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} 100\cdot U + 10\cdot D + 9 = (100\cdot 9 + 10\cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 100U + 10D + 9 = 900 + 10D + U - 99 \\ D + U = 18 - 9 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 100U + 10D - 10D - U = 900 - 99 - 9 \\ D + U = 18 - 9 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 99U = 792 \\ D + U = 9 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 9U = 72 \\ D + U = 9 \end{matrix}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «U» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

3.ª FASE: EJECUTAR DEL PLAN

El sistema $\left\{\begin{matrix} 100\cdot U + 10\cdot D + 9 = (100\cdot 9 + 10\cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{matrix}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{matrix} 9U = 72 \\ D + U = 9 \end{matrix}\right\}$.

De la ecuación 9U = 72 obtenemos U = 72 : 9 = 8.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: D + 8 = 9 → D = 9 – 8 =1.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Comprobamos que el sistema $\begin{cases} 100 \cdot U + 10 \cdot D + 9 = (100 \cdot 9 + 10 \cdot D + U) - 99 \\ 9 + D + U = 18 \end{cases}$ está correctamente resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{ \begin{cases} 100U + 10D + 9 = 100 \cdot 8 + 10 \cdot 1 + 9 = 800 + 10 + 9 = 819 \\ (100 \cdot 9 + 10D + U) - 99 = (900 + 10 \cdot 1 + 8) - 99 = 918 - 99 = 819 \end{cases} \right\} \\ 9 + 1 + 8 = 18 \right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y el número que se ha obtenido como solución es: 100 · 9 + 10 · 1 + 8 = 918.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de tres cifras comprendido entre 900 y 1.000.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es acertada, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos el número, 918 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos cuánto debemos añadir al número que resulta de invertir el orden de las cifras para obtener el número original y, también, la suma de las cifras (eran datos y ahora pasan a ser incógnitas), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En el 918, ¿cuántas unidades es menor el número que resulta de invertir el orden de las cifras?, y ¿cuánto suman las cifras?*». Esperamos que la respuesta a la primera pregunta sea 99, y a la segunda, 18.

Hacemos los cálculos:

Para la primera pregunta: 819 + x = 918 ⟶ x = 918 – 819 = 99.

Para la segunda: 9 + 1 +8 = 18.

Como esperábamos, pues, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de tres cifras comprendido entre 900 y 1.000.

- Al invertir el orden de las cifras del número resulta un número 99 unidades menor que el original.
- Al sumar sus cifras nos da 18.

• Incógnitas:

- Un número de tres cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

Se busca un número de tres cifras comprendido entre 900 y 1.000 y que al sumar sus cifras nos da 18, por lo tanto, tenemos que los posibles serían: 990, 981, 972, 963, 954, 945, 936, 927, 918 y 909, entonces veremos en una tabla quién o cuáles de ellos cumplen el otro dato del enunciado:

Número	Número que resulta al invertir el orden de las cifras	Número original menos 99	¿Al invertir el orden de las cifras del número original resulta un número 99 unidades menor que él?
990	99	990 – 99 = 891	NO
981	189	981 – 99 = 882	NO
972	279	972 – 99 = 873	NO
963	369	963 – 99 = 864	NO
954	459	954 – 99 = 855	NO
945	549	945 – 99 = 846	NO
936	639	936 – 99 = 837	NO

Vemos en la tabla que, a medida que vamos probando, la diferencia se aproxima más hacia el número resultante de invertir el orden de las cifras, por lo que esperamos que el problema tenga solución.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos con las pruebas intentando encontrar la solución.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Agotaremos el tanteo.

Número	Número que resulta al invertir el orden de las cifras	Número original menos 99	¿Al invertir el orden de las cifras del número original resulta un número 99 unidades menor que él?
…	…	…	…
945	549	945 – 99 = 846	NO
936	639	936 – 99 = 837	NO
927	729	927 – 99 = 828	NO
918	819	918 – 99 = 819	SÍ
909	909	909 – 99 = 810	NO

Entonces, solo hay una solución, 918.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

La solución es razonable ya que es un número de tres cifras comprendido entre 900 y 1.000.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿Es un número de tres cifras comprendido entre 900 y 1.000? 918. Sí.
- ¿Al invertir el orden de las cifras resulta un número 99 unidades menor que el número original? 918 – 819 = 99. Sí.
- ¿Al sumar sus cifras nos da 18? 9 + 1 + 8 = 18. Sí.

El número 918 verifica los datos del enunciado, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Problema C.8

Un amigo le pregunta a otro, ambos matemáticos: ¿Cuánto te ha costado el ordenador que te has comprado?, a lo que el amigo le contesta: «El precio es un número capicúa de tres cifras, que suman 19, y si se intercambia la cifra de las centenas con la de las decenas, el nuevo número es 90 unidades mayor que el inicial». ¿Cuál es el precio del ordenador?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El precio es un número capicúa de tres cifras, que suman 19.
  - Si se intercambia la cifra de las centenas con la de las decenas, el nuevo número es 90 unidades mayor que el inicial.
- Incógnitas:
  - El precio del ordenador.

B) ¿El problema es resoluble?

Se busca un número de tres cifras y los datos se refieren a las cifras que lo forman, por lo que realmente tenemos como incógnitas las cifras, pero como nos dicen que el número es capicúa, la cifra de las unidades tiene que ser igual a la de las centenas, por lo que no tenemos tres incógnitas sino solo dos, la cifra de las decenas y la de las unidades.

Si a la cifra de las decenas la llamamos «D» y a la de las unidades «U», por ser capicúa el número, la cifra de las centenas también será «U», entonces, la descomposición polinómica del número sería 100 · U + 10 · D + U.

Los datos del problema los traducimos en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} U + D + U = 19 \\ 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 \end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} U + D + U = 19 \\ \quad 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 \end{array}\right\} \rightarrow$$

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 2U + D = 19 \\ 100D + 11U = (101U + 10D) + 90 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2U + D = 19 \\ 100D + 11U - (101U + 10D) = 90 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 2U + D = 19 \\ 100D + 11U - 101U - 10D = 90 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2U + D = 19 \\ 90D - 90U = 90 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2U + D = 19 \\ D - U = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + 2U = 19 \\ D - U = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + 2U = 19 \\ 3U = 18 \end{matrix}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «U» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

3.ª FASE: EJECUTAR DEL PLAN

El sistema $\left\{\begin{matrix} U + D + U = 19 \\ 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 \end{matrix}\right\}$ al triangularizarlo lo hemos convertido en $\left\{\begin{matrix} D + 2U = 19 \\ 3U = 18 \end{matrix}\right\}$.

De la ecuación 3U = 18 obtenemos U = 6.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: D + 2 · 6 = 19 → D + 12 = 19 → → D = 19 – 12 = 7.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} U + D + U = 19 \\ 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 \end{matrix}\right\}$ está correctamente resuelto sustituyendo los valores calculados:

$$\left\{\begin{matrix} U + D + U = 6 + 7 + 6 = 19 \\ \left\{\begin{matrix} 100 \cdot D + 10 \cdot U + U = 100 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 6 = 766 \\ (100 \cdot U + 10 \cdot D + U) + 90 = 100 \cdot 6 + 10 \cdot 7 + 6 + 90 = 766 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y el número que se ha obtenido como solución es: 100 · U + 10 · D + U = 100 · 6 + 10 · 7 + 6 = 676, entonces, el precio del ordenador es de 676 €.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4a FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de tres cifras capicúa y es un precio razonable para un ordenador.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es acertada, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos el número, 676 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la suma de las cifras y, también, cuánto tenemos que añadirle para obtener el número que resulta de intercambiar la cifra de las centenas con la de las decenas (eran datos y ahora pasan a ser incógnitas), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En el 676, ¿cuánto suman las cifras?, y ¿cuántas unidades es mayor el número que resulta de intercambiar la cifra de las centenas con la de las decenas?*». Esperamos que la respuesta a la primera pregunta sea 19, y a la segunda, 90.

Hacemos los cálculos:

Para la primera pregunta: $6 + 7 + 6 = 19$.

Para la segunda: $x + 676 = 766 \rightarrow x = 766 - 676 = 90$

Como esperábamos, luego, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El precio es un número capicúa de tres cifras, que suman 19.
  - Si se intercambia la cifra de las centenas con la de las decenas, el nuevo número es 90 unidades mayor que el inicial.
- Incógnitas:
  - El precio del ordenador.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) ¿El problema es resoluble?

Haciendo pruebas veremos si se pueden dar los datos que dice el enunciado.

Las tres cifras tienen que sumar 19 y, como el número debe ser capicúa, la cifra de las centenas y la de las unidades debe ser la misma, entonces, la primera cifra no puede ser 1, pues, el número capicúa mayor que podríamos formar sería 191 y 1 + 9 + 1 = 11; análogamente no puede ser 2, ni 3, ni 4, ya que tendríamos: 494 y 4 + 9 + 4 = 17, por lo que los posibles números serían: 595, 676, 757, 838 y 919.

Recogemos en una tabla las pruebas para ver si se puede dar, cumplir, el otro dato del enunciado:

Número	Intercambiamos las cifras de las decenas y las centenas	Número más 90	¿Si intercambiamos la cifra de las centenas con la de las decenas, el nuevo número es 90 unidades mayor que el inicial?
595	955	685	NO
676	766	766	SÍ

Como hemos encontrado una solución, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Veremos si hay más soluciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Agotaremos el tanteo para ver si hay más números de tres cifras que suman 19 para que se cumpla el segundo dato del enunciado.

Número	Intercambiamos las cifras de las decenas y las centenas	Número más 90	¿Si intercambiamos la cifra de las centenas con la de las decenas, el nuevo número es 90 unidades mayor que el inicial?
595	955	685	NO
676	766	766	SÍ
757	577	847	NO
838	388	928	NO
919	199	1009	NO

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Entonces, solo hay una solución, el precio del ordenador es de 676 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número capicúa de tres cifras y, es un precio razonable para un ordenador.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos que la solución verifica los datos del enunciado del problema:

- ¿El precio es un número capicúa de tres cifras, que suman 19? 6 + 7 + 6 = = 19, sí.
- ¿Si se intercambia la cifra de las centenas con la de las decenas, el nuevo número es 90 unidades mayor? 766, 676 + 90 = 766, sí.

Comprobamos que el número 676 verifica los datos del enunciado, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

Problema C.9

Un número tiene dos cifras que suman 9. Si el doble de este número es igual a 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden, ¿de qué número se trata?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de dos cifras que suman 9.
  - El doble de este número es igual a 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Incógnitas:
  - El número de dos cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

Se busca un número de dos cifras y los datos se refieren a las cifras que lo forman, por lo que realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades de primer orden.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades de primer orden, entonces, la expresión polinómica del número que queremos calcular es 10 · D + U.

Por lo tanto, los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 4 + 4 \cdot U \end{matrix}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 4 + 4 \cdot U \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 20D + 2U = 4 + 4\,U \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 20D + 2U - 4U = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 20D - 2U = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 10D - U = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 11D = 11 \end{matrix}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «D» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2 \cdot (10 \cdot D + U) = 4 + 4 \cdot U \end{matrix}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 11D = 11 \end{matrix}\right\}$.

De la ecuación 11D = 11 obtenemos D = 1.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: 1 + U = 9 → U = 9 – 1 = 8.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} D + U = 9 \\ 2 \cdot (10D + U) = 4 + 4 \cdot U \end{matrix}\right\}$ está correctamente resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 1 + 8 = 9 \\ \left\{\begin{matrix} 2 \cdot (10D + U) = 2 \cdot (10 \cdot 1 + 8) = 2 \cdot (10 + 8) = 2 \cdot (18) = 36 \\ 4 + 4 \cdot 8 = 4 + 32 = 36 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto, y la solución es: 10 · D + U = = 10 · 1 + 8 = 18.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras.

B) Comprobar la solución

Para confirmar que la solución es acertada, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos el número, 18 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), calcularemos la suma de las cifras y, también, cuánto es 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden (eran datos y ahora pasan a ser incógnitas), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Si tenemos el número 18, ¿cuánto es la suma de las cifras?, y ¿el doble de 18 es 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden?*». Esperamos que la respuesta a la primera pregunta sea 9, y a la segunda, sí.

Hacemos los cálculos:

Para la primera pregunta: 1 + 8 = 9.

Para la segunda: 4 + 4 · 8 = 4 + 32 = 36 = 2 · 18, entonces, sí.

Como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de dos cifras que suman 9.
  - El doble de este número es igual a 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden.
- Incógnitas:
  - El número de dos cifras.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) ¿El problema es resoluble?

Como las dos cifras del número tienen que sumar 9, los números podrían ser 90; 81, 18; 72, 27; 63, 36, o 54, 45.

Probamos a ver si se puede dar, cumplir, el otro dato del enunciado, lo que recogemos en una tabla:

Número	Doble del número	4 más 4 veces la cifra de las unidades	¿El doble del número es igual a 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden?
90	180	$4 + 4 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$	NO
81	162	$4 + 4 \cdot 1 = 4 + 4 = 8$	NO
18	36	$4 + 4 \cdot 8 = 36$	SÍ

Como hemos encontrado una solución, evidentemente, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Por si hubieran más soluciones, continuaremos haciendo todos los tanteos en los números de dos cifras que antes hemos dicho que las cifras suman 9.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	Doble del número	4 más 4 veces la cifra de las unidades	¿El doble del número es igual a 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden?
90	180	$4 + 4 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$	NO
81	162	$4 + 4 \cdot 1 = 4 + 4 = 8$	NO
18	36	$4 + 4 \cdot 8 = 36$	SÍ
27	54	$4 + 4 \cdot 7 = 4 + 28 = 32$	NO

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Número	Doble del número	4 más 4 veces la cifra de las unidades	¿El doble del número es igual a 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden?
72	144	$4 + 4 \cdot 2 = 4 + 8 = 12$	NO
36	72	$4 + 4 \cdot 6 = 4 + 24 = 28$	NO
63	126	$4 + 4 \cdot 3 = 4 + 12 = 16$	NO
45	90	$4 + 4 \cdot 5 = 4 + 20 = 24$	NO
54	108	$4 + 4 \cdot 4 = 4 + 16 = 20$	NO

Entonces, no tenemos más solución que el número 18.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución verifica los datos del enunciado del problema:

- ¿Un número de dos cifras que suman 9? $1 + 8 = 9$, sí.
- ¿El doble de este número es igual a 4 más 4 veces la cifra de las unidades de primer orden? $4 + 4 \cdot 8 = 4 + 32 = 36 = 2 \cdot 18$, sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por lo tanto, creemos que está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

Problema C.10

Hay que encontrar un número de dos cifras sabiendo que la suma de estas es 12, y que si invertimos el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 de él.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de dos cifras cuya suma es 12.
  - Si invertimos el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 del original.
- Incógnitas:
  - Un número de dos cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

Se quiere calcular un número de dos cifras y los datos se refieren a las cifras que lo forman, por lo que realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades de primer orden.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades de primer orden, entonces, la expresión polinómica del número que queremos calcular es $10 \cdot D + U$.

El número que resulta de invertir el orden de sus cifras tiene como expresión polinómica $10 \cdot U + D$.

Los datos del enunciado del problema se traducen en el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}.$$

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D + U = 12 \\ (10U + D) \cdot 7 = 4 \cdot (10D + U) \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} D + U = 12 \\ 70U + 7D = 40D + 4U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D + U = 12 \\ 70U + 7D - 40D - 4U = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} D + U = 12 \\ 66U - 33D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U + D = 12 \\ 2U - D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U + D = 12 \\ 3U = 12 \end{cases}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «U» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\begin{cases} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{cases}$ al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\begin{cases} U + D = 12 \\ 3U = 12 \end{cases}$.

De la ecuación 3U = 12 obtenemos U = 4.
Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: 4 + D = 12 → D = 12 – 4 → D = 8.

Comprobamos que el sistema $\begin{cases} D + U = 12 \\ 10 \cdot U + D = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot D + U) \end{cases}$ está correctamente resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\begin{cases} D + U = 8 + 4 = 12 \\ \begin{cases} 10U + D = 10 \cdot 4 + 8 = 48 \\ \frac{4}{7} \cdot (10D + U) = \frac{4}{7} \cdot (10 \cdot 8 + 4) = \frac{4}{7} \cdot 84 = 48 \end{cases} \end{cases}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y el número que se ha obtenido como solución es: 10 · D + U = 10 · 8 + 4 = 84.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de dos cifras.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) Comprobar la solución

Para verificar la solución aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente». Si duplicáramos los datos, las cifras tendrían que sumar 24, lo cual no es posible en los números de dos cifras, por lo tanto, reduciremos los datos a la mitad, que las cifras sumen 6, lo que sí es posible en los números de dos cifras, con lo que consideramos el nuevo problema: «*Hay que encontrar un número de dos cifras sabiendo que la suma de estas es 6 y que si invertimos el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 de él*». Esperamos que la respuesta sea la mitad de 84, es decir, 42.

Hacemos los cálculos:

$$\begin{cases} D+U=6 \\ 10\cdot U+D=\frac{4}{7}\cdot(10\cdot D+U) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D+U=6 \\ (10U+D)\cdot 7=4\cdot(10D+U) \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} D+U=6 \\ 70U+7D=40D+4U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D+U=6 \\ 70U+7D-40D-4U=0 \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} D+U=6 \\ 66U-33D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U+D=6 \\ 2U-D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U+D=6 \\ 3U=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U+D=6 \\ U=2 \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow 2+D=6 \rightarrow \quad D=6-2=4.$$

Entonces, $10 \cdot D + U = 10 \cdot 4 + 2 = 42$; como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de dos cifras cuya suma es 12.
  - Si invertimos el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 del original.
- Incógnitas:
  - Un número de dos cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

Se busca un número de dos cifras cuya suma es 12, por lo tanto, tenemos las siguientes parejas de cifras que suman 12: 3 y 9, 4 y 8, 5 y 7, además de 6 y 6, con las que podemos formar, respectivamente, los números de dos cifras: 39, 93; 48, 84; 57, 75, y 66.

El dato «si invertimos el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 del original» nos dice que el número que obtenemos es más pequeño que el inicial, luego los posibles números iniciales serán: 93, 84 y 75. El 66 ya no lo consideramos porque al invertir el orden de sus cifras no cambia.

Ahora comprobamos si cuando invertimos el orden de sus cifras el número que resulta es igual a 4/7 de él, lo que recogemos en una tabla:

Número	Número que resulta si invertimos el orden de las cifras del original	4/7 del número original	¿Invirtiendo el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 del original?
93	39	$(4/7) \cdot 93 = 53{,}14$	NO
84	48	$(4/7) \cdot 84 = 48$	SÍ

Como hemos encontrado una solución, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Veremos si hay más soluciones agotando el tanteo.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	Número que resulta si invertimos el orden de las cifras del original	4/7 del número original	¿Invirtiendo el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 del original?
93	39	$(4/7) \cdot 93 = 53{,}14$	NO
84	48	$(4/7) \cdot 84 = 48$	SÍ
75	57	$(4/7) \cdot 75 = 42{,}85$	NO

Entonces, solo hay una solución, 84.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de dos cifras.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución verifica los datos del enunciado del problema:

- ¿Es un número de dos cifras cuya suma es 12? 84, 8 + 4 = 12. Sí.
- ¿Si invertimos el orden de las cifras el número que resulta es igual a 4/7 del original? 48, (4/7) · 84 = 48. Sí.

Comprobamos que el número 84 verifica los datos del enunciado, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

Problema C.11

Un amigo le pregunta a otro, ambos matemáticos: «¿Cuánto te ha costado el videojuego que te has comprado?», a lo que el amigo le contesta: «El precio es un número de dos cifras, la diferencia entre el triple de la cifra de las decenas y el doble de la cifra de las unidades es uno, y si intercambias la cifra de las unidades con la de las decenas el nuevo número es 18 unidades mayor que el inicial». ¿Cuál es el precio del videojuego?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El precio del videojuego es un número de dos cifras.
  - La diferencia entre el triple de la cifra de las decenas y el doble de la cifra de las unidades es uno.
  - Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las decenas el nuevo número es 18 unidades mayor que el inicial.

- Incógnitas:
  - El precio del videojuego.

B) ¿El problema es resoluble?

Como el precio que buscamos es un número de dos cifras y los datos se refieren precisamente a las cifras que forman el número, realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades del número en cuestión.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades, por lo que la expresión polinómica del número buscado es: $10 \cdot D + U$.

El número que resulta de invertir el orden de las cifras del precio, tiene como expresión polinómica $10 \cdot U + D$.

Entonces, tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que recoge los datos del problema $\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ 10U + D = 18 + 10D + U \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ 10U + D - 10D - U = 18 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ -9D + 9U = 18 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ -D + U = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ -3D + 3U = 6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ U = 7 \end{matrix}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «U» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{matrix} 3D - 2U = 1 \\ U = 7 \end{matrix}\right\}$.

De la 2.ª igualdad obtenemos $U = 7$.

Entonces, sustituyendo en la 1.ª ecuación: $3D - 2U = 1 \rightarrow 3D - 2 \cdot 7 = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 3D - 14 = 1 \rightarrow 3D = 1 + 14 \rightarrow 3D = 15 \rightarrow D = 5$.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} 3 \cdot D - 2 \cdot U = 1 \\ 10 \cdot U + D = 18 + (10 \cdot D + U) \end{matrix}\right\}$ está bien resuelto sustituyendo los valores encontrados:

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

$$\left\{\begin{array}{l} 3\cdot D-2\cdot U=3\cdot 5-2\cdot 7=15-14=1 \\ \left\{\begin{array}{l} 10\cdot U+D=10\cdot 7+5=70+5=75 \\ 18+(10\cdot D+U)=18+(10\cdot 5+7)=18+(50+7)=18+57=75 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y la solución del problema es: 10 · D + U = 10 · 5 + 7 = 57, luego, el precio del videojuego es de 57 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de dos cifras y, además, el precio del videojuego es un precio posible.

B) Comprobar la solución

Para ver que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, por tanteo.

Como tiene que ser un número de dos cifras, sabemos que la cifra de las decenas, la «D», tiene que ser diferente de cero, por tanto, podrá ser: 1, 2, …, 9.

Sabemos que el triple de las decenas menos el doble de las unidades es 1. El doble de las unidades es un número par, entonces, el triple de las decenas tendría que ser impar para que la diferencia sea 1, por tanto, la cifra de las decenas debería ser impar, luego podría ser: 1, 3, 5, 7 o 9.

Como 3 · D – 2 · U tiene que ser igual a 1, elegida la cifra de las decenas, la «D», calcularemos la de las unidades, la «U».

Si D = 1 → 3 · 1 – 2 · U = 1 → 3 – 2U = 1 → 3 – 1 = 2U → 2 = 2U → U = = 1.

Entonces, 10 · D + U = 10 · 1 + 1 = 10 + 1 = 11, y si intercambiamos el orden de las cifras es 11, que no es 18 unidades mayor que 11. Luego 11 no es solución.

Recogemos en una tabla los cálculos con las diferentes posibilidades de «D» y de «U»:

D	3D – 2U = 1 U = ¿?	U	10D + U	10U + D	18 + + (10D + U)	10U + D = = 18 + (10D + + U)?
1	3 · 1 – 2U = = 1 2 = 2y U = 1	1	11	11	18 + 11 = = 29	NO

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

D	3D – 2U = 1 U = ¿?	U	10D + U	10U + D	18 + + (10D + U)	10U + D = = 18 + (10D + + U)?
3	3 · 3 – 2U = = 1 8 = 2U U = 4	4	34	43	18 + 34 = = 52	NO
5	3 · 5 – 2U = = 1 14 = 2U U = 7	7	57	75	18 + 57 = = 75	SÍ
7	3 · 7 – 2U = = 1 20 = 2U U = 10	No es cifra				
9	3 · 9 – 2U = = 1 26 = 2U U = 13	No es cifra				

Entonces, 57 es el número buscado.

Que es la misma solución que habíamos obtenido, por tanto, el problema está bien resuelto.

NOTA: La comprobación se podría haber hecho sin utilizar la tabla, pero pensamos que sería menos clara.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El precio del videojuego es un número de dos cifras.
  - La diferencia entre el triple de la cifra de las decenas y el doble de la cifra de las unidades es uno.
  - Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las decenas el nuevo número es 18 unidades mayor que el inicial.

- Incógnitas:
  - El precio del videojuego.

B) ¿El problema es resoluble?

El número que buscamos es de dos cifras, por tanto, la cifra de las decenas, la «D», tiene que ser diferente de cero, entonces, podrá ser: 1, 2, …, 9.

Sabemos que si se intercambia la cifra de las unidades con la de las decenas el nuevo número es 18 unidades mayor que el inicial, luego el nuevo número es casi dos decenas mayor que el inicial, entonces, en el número inicial la cifra de las unidades de primer orden tendría que ser 2 unidades mayor que la cifra de las decenas, por tanto, encontramos las siguientes posibilidades: 13, 24, 35, 46, 57, 68 y 79.

Realizaremos un tanteo con estos números:

Número	¿Triple de las decenas menos el doble de las unidades es 1?	Número cambiando el orden de las cifras	¿Si se intercambia el orden de las cifras el nuevo número es 18 unidades mayor que el inicial?
13	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3 \rightarrow$ NO		
24	$3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -2 \rightarrow$ NO		
35	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1 \rightarrow$ NO		
46	$3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0 \rightarrow$ NO		
57	$3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 \rightarrow$ SÍ	75	$18 + 57 = 75 \rightarrow$ SÍ

Hemos encontrado una solución, 57; por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo para ver si encontramos otra solución.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	¿Triple de las decenas menos el doble de las unidades es 1?	Número cambiando el orden de las cifras	¿Si se intercambia el orden de las cifras el nuevo número es 18 unidades mayor que el inicial?
…	…	…	…
57	$3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 \rightarrow$ SÍ	75	$18 + 57 = 75 \rightarrow$ SÍ
68	$3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 2 \rightarrow$ NO		
79	$3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 = 3 \rightarrow$ NO		

Por lo tanto, excepto 57, no encontramos ninguna otra solución. Luego la solución del problema es que el precio del videojuego es de 57 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es un número de dos cifras y, además, es un precio posible para un videojuego.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿El precio del videojuego es un número de dos cifras? 57. Sí.
- ¿La diferencia entre el triple de la cifra de las decenas y el doble de la cifra de las unidades es uno? $3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1$. Sí.
- ¿Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las decenas el nuevo número es 18 unidades mayor que el inicial? $18 + 57 = 75$. Sí.

Vemos que se verifican los datos del problema, por tanto, creemos que está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Problema C.12

Se encuentran dos vecinos y uno le pregunta al otro la edad que tiene, a lo que le contesta: «Mi edad es un número de dos cifras en el que las cifras se diferencian en una unidad y, si dividimos mi edad entre el número que resultaría de invertir el orden de las cifras que forman mi edad, el cociente es 1,2». Ante semejante respuesta el vecino pensó: «Este debe ser matemático». ¿Cuál es la edad?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras que, entre ellas, se diferencian en una unidad.
  - Si dividimos la edad entre el número que resultaría de invertir el orden de las cifras que forman la edad, el cociente es 1,2.
- Incógnitas:
  - La edad del vecino.

B) ¿El problema es resoluble?

Se quiere calcular una edad, un número de dos cifras, y los datos se refieren a las cifras que lo forman, por lo que realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades de primer orden.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades de primer orden, entonces, la expresión polinómica de la edad que queremos calcular es $10 \cdot D + U$.

El número que resulta de intercambiar el orden de las cifras que forman la edad tiene como expresión polinómica $10 \cdot U + D$.

El cociente de dividir la edad entre el número que resulta de invertir el orden de las cifras es mayor que 1, con lo que la edad es mayor que el número obtenido al intercambiar las cifras, por tanto, la cifra de las decenas de la edad buscada debe ser mayor que la de las unidades. Como las dos cifras de la edad se diferencian en 1 unidad, entonces, el dato del enunciado del problema referente a la diferencia de las cifras se traduce matemáticamente en «$D - U = 1$»; por tanto, los datos del enunciado del problema se traducen en el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{cases} D - U = 1 \\ \dfrac{10 \cdot D + U}{10 \cdot U + D} = 1{,}2 \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} D - U = 1 \\ 10 \cdot D + U = 1{,}2 \cdot (10 \cdot U + D) \end{cases}\right\}.$$

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left.\begin{cases} D - U = 1 \\ 10 \cdot D + U = 1{,}2 \cdot (10 \cdot U + D) \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} D - U = 1 \\ 10D + U = 12U + 1{,}2D \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} D - U = 1 \\ 10D + U - 12U - 1{,}2D = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} D - U = 1 \\ 8{,}8D - 11U = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} 11D - 11U = 11 \\ 8{,}8D - 11U = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 11D - 11U = 11 \\ 2{,}2D = 11 \end{cases}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «D» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left.\begin{cases} D - U = 1 \\ 10 \cdot D + U = 1{,}2 \cdot (10 \cdot U + D) \end{cases}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left.\begin{cases} 11D - 11U = 11 \\ 2{,}2D = 11 \end{cases}\right\}$.

De la ecuación $2{,}2D = 11$ obtenemos $D = 11 : 2{,}2 = 5$.

Entonces, en la otra ecuación $11D - 11U = 11$, simplificada $D - U = 1$, sustituyendo $D = 5$ tenemos: $5 - U = 1 \rightarrow -U = 1 - 5 = -4 \rightarrow U = 4$.

Comprobamos que el sistema $\left.\begin{cases} D - U = 1 \\ 10 \cdot D + U = 1{,}2 \cdot (10 \cdot U + D) \end{cases}\right\}$ está correctamente resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left.\begin{cases} D - U = 5 - 4 = 1 \\ \left.\begin{cases} 10D + U = 10 \cdot 5 + 4 = 54 \\ 1{,}2 \cdot (10U + D) = 1{,}2 \cdot (10 \cdot 4 + 5) = 1{,}2 \cdot 45 = 54 \end{cases}\right\} \end{cases}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y el número que se quiere calcular, la edad del vecino, es: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 5 + 4 = 54$.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

La solución es razonable, ya que es un número de dos cifras y, además, una edad posible.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) Comprobar la solución

Para verificar la solución aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la edad del vecino, 54 años (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la diferencia de las cifras y, también, cuánto es el cociente entre la edad y el número que resulta de invertir el orden de las cifras que forman la edad (eran datos y ahora pasan a ser incógnitas), con lo que consideramos el siguiente problema: «*El vecino tiene 54 años, ¿cuánto es la diferencia de las cifras de la edad? y, si dividimos la edad entre el número que resultaría de invertir el orden de las cifras que forman la edad, ¿cuánto es el cociente?*». Esperamos que la respuesta a la primera pregunta sea 1, y a la segunda, 1,2.

Hacemos los cálculos:

Para la primera pregunta: 5 – 4 = 1.

Para la segunda: 54 : 45 = 1,2.

Como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La edad es un número de dos cifras en el que las cifras se diferencian en una unidad.
  - Si dividimos la edad entre el número que resultaría de invertir el orden de las cifras que forman la edad, el cociente es 1,2.
- Incógnitas:
  - La edad del vecino.

B) ¿El problema es resoluble?

Las dos cifras de la edad se diferencian en 1 unidad y el cociente es mayor que 1, con lo que la edad debe ser mayor que el número obtenido al intercambiar las cifras, por tanto, la cifra de las decenas de la edad buscada debe ser mayor que la de las unidades, entonces, los posibles números de dos cifras, que estas se

diferencian en 1 unidad y, que el número es mayor que el obtenido al intercambiar las cifras, son: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 o 98.

Probemos a ver si se puede dar, cumplir, el otro dato del enunciado, lo que recogemos en una tabla:

Edad	Número obtenido al invertir el orden de las cifras	Cociente entre la edad y el número que resulta de invertir el orden de las cifras que forman la edad	¿El cociente es igual a 1,2?
10	1	10	NO
21	12	1,75	NO
32	23	1,39	NO
43	34	1,26	NO

Vemos en la tabla que, a medida que hacemos pruebas, el cociente se aproxima más al 1,2 del enunciado, por lo que esperamos que el problema tenga solución.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Agotaremos el tanteo.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Edad	Número obtenido al invertir el orden de las cifras	Cociente entre la edad y el número que resulta de invertir el orden de las cifras que forman la edad	¿El cociente es igual a 1,2?
10	1	10	NO
21	12	1,75	NO
32	23	1,39	NO
43	34	1,26	NO
54	45	1,2	SÍ

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Edat	Nombre obtingut en invertir l'ordre de les xifres	Quocient entre l'edat i el nombre que resulta d'invertir l'ordre de les xifres que formen l'edat	El quocient és igual a 1,2?
65	56	1,16	NO
76	67	1,13	NO
87	78	1,11	NO
98	89	1,10	NO

Agotado el tanteo, 54 es el número buscado, la edad del vecino.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

La solución es razonable, ya que es un número de dos cifras y, además, una edad posible.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿La edad es un número de dos cifras en el que las cifras se diferencian en una unidad? 5 – 4 = 1. Sí.
- ¿Si dividimos la edad entre el número que resultaría de invertir el orden de las cifras que forman la edad, el cociente es 1,2? 54 : 45 = 1,2. Sí.

El número 54 verifica los datos del enunciado, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

Problema C.13

Se quiere calcular un número de dos cifras. La diferencia entre el número que resulta de triplicar las decenas y el número de las unidades de primer orden es el décimo número natural par distinto de cero. Si añadimos dieciocho al número que resulta de intercambiar sus cifras, obtendremos el número deseado.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de dos cifras.
  - La diferencia entre el número que resulta de triplicar las decenas y el número de las unidades de primer orden es el décimo número natural par distinto de cero.
  - Si añadimos dieciocho al número que resulta de intercambiar sus cifras, obtendremos el número deseado.
- Incógnitas:
  - El número de dos cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

Se quiere calcular un número de dos cifras y los datos se refieren a las cifras que lo forman, por lo que realmente tenemos dos incógnitas, la cifra de las decenas y la de las unidades de primer orden.

Llamaremos «D» a la cifra de las decenas y «U» a la de las unidades de primer orden, entonces, la expresión polinómica del número que queremos calcular es $10 \cdot D + U$.

El número que resulta de intercambiar sus cifras tiene como expresión polinómica $10 \cdot U + D$.

El décimo número natural par distinto de cero es 20, por lo tanto, los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l}3 \cdot D - U = 20 \\ 18 + (10 \cdot U + D) = 10 \cdot D + U\end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l}3 \cdot D - U = 20 \\ 18 + (10 \cdot U + D) = 10 \cdot D + U\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}3D - U = 20 \\ (10U - U) + (D - 10D) = -18\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l}3D - U = 20 \\ 9U - 9D = -18\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}3D - U = 20 \\ U - D = -2\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}3D - U = 20 \\ -D + U = -2\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}3D - U = 20 \\ 2D = 18\end{array}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como «D» será un número natural de una cifra, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{matrix} 3\cdot D - U = 20 \\ 18 + (10\cdot U + D) = 10\cdot D + U \end{matrix}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{matrix} 3D - U = 20 \\ 2D = 18 \end{matrix}\right\}$.

De la ecuación 2D = 18 obtenemos D = 9.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: $3\cdot 9 - U = 20 \rightarrow 27 - U = 20 \rightarrow$ $\rightarrow -U = 20 - 27 = -7 \rightarrow U = 7$.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} 3\cdot D - U = 20 \\ 18 + (10\cdot U + D) = 10\cdot D + U \end{matrix}\right\}$ está correctamente resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{\begin{matrix} 3D - U = 3\cdot 9 - 7 = 27 - 7 = 20 \\ \left\{\begin{matrix} 18 + (10U + D) = 18 + (10\cdot 7 + 9) = 18 + (70 + 9) = 18 + 79 = 97 \\ 10D + U = 10\cdot 9 + 7 = 97 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto y el número que se quiere calcular es: $10 \cdot D + U = 10 \cdot 9 + 7 = 97$.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es acertada, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos el número, 97 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la diferencia entre el número que resulta de triplicar las decenas y la cifra de las unidades de primer orden y, también, cuánto tenemos que añadir al número que resulta de intercambiar sus cifras para obtener el 97 (eran datos y ahora pasan a ser incógnitas), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En el 97, ¿cuánto es la diferencia entre el número que resulta de triplicar las decenas y el número de las unidades de primer orden? y, ¿cuánto debemos añadirle al número que resulta de intercambiar sus cifras para obtener el 97?*». Esperamos que la respuesta a la primera pregunta sea 20, y a la segunda, 18.

Hacemos los cálculos:

Para la primera pregunta: $3 \cdot 9 - 7 = 20$.

Para la segunda: $x + 79 = 97 \rightarrow x = 97 - 79 = 18$.

Como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un número de dos cifras.
  - La diferencia entre el número que resulta de triplicar las decenas y el número de las unidades de primer orden es el décimo número natural par distinto de cero.
  - Si añadimos dieciocho al número que resulta de intercambiar sus cifras, obtendremos el número deseado.
- Incógnitas:
  - El número de dos cifras.

B) ¿El problema es resoluble?

Haremos pruebas para ver si se pueden satisfacer los datos del enunciado.

Como la diferencia entre el número que resulta de triplicar las decenas y el número de las unidades de primer orden es el décimo número natural par distinto de cero, es decir, 20, el triple de la cifra de las decenas tendrá que ser mayor o igual que 20, por lo que tendremos que empezar las pruebas suponiendo que la cifra de las decenas es 7, puesto que $6 \cdot 3 = 18$ y $7 \cdot 3 = 21$, y continuar aumentando la cifra de las decenas. Para la cifra de las unidades de primer orden elegiremos la que corresponda para que la diferencia sea 20.

Por tanto, las posibles soluciones serán: 71, 84 o 97.

Recogemos en una tabla las pruebas para ver si cumplen el tercer dato:

Número	Número que resulta de intercambiar las cifras	18 más número resultado de intercambiar las cifras	¿Si añadimos dieciocho el número que resulta de intercambiar sus cifras, obtendremos el número inicial?
71	17	18 + 17 = 35	NO
84	48	18 + 48 = 66	NO

Vemos en estos números que si añadimos dieciocho al número que resulta de intercambiar sus cifras, la suma cada vez se aproxima más al número inicial, por lo tanto, es posible que el problema sea resoluble.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Agotaremos el tanteo para ver si hay un número de dos cifras que cumple los datos del enunciado.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número	Número que resulta de intercambiar las cifras	18 más número resultado de intercambiar las cifras	¿Si añadimos dieciocho el número que resulta de intercambiar sus cifras, obtendremos el número inicial?
71	17	18 + 17 = 35	NO
84	48	18 + 48 = 66	NO
97	79	18 + 79 = 97	SÍ

Agotado el tanteo, 97 es el número buscado.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un número de dos cifras.

B) Comprobar la solución

Lo hacemos verificando los datos del enunciado del problema:

- ¿Un número de dos cifras? 97 es un número de dos cifras.
- ¿La diferencia entre el número que resulta de triplicar las decenas y el número de las unidades de primer orden es el décimo número natural par distinto de cero? (9 · 3) – 7 = 20, sí.
- ¿Si añadimos dieciocho al número que resulta de intercambiar sus cifras, obtendremos el número deseado? 18 + 79 = 97, sí.

El número 97 verifica los datos del enunciado, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: Esta comprobación también se podría hacer como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

Tema 4. Problemas de operaciones con números naturales

4.1. Introducción

Presentamos en este tema la RPM en diferentes contextos, donde el denominador común de los problemas es la utilización de las operaciones aritméticas con números naturales para su resolución, correspondiente, por tanto, con el tema 4 de MP1006 Didáctica de las Matemáticas I (UJI, Plan de Estudios 2010) o MP1806 Didáctica de las Matemáticas I (reforma/modificación de 2018) y con el tema 2 de Alcalde, Pérez y Lorenzo (2014).

4.2. Problemas

Problema D.1

Carmen coloca en las estanterías del almacén 76 mochilas con ruedas y 94 sin ruedas. Para completar un estante pone 24 mochilas. ¿Cuántos estantes llena? Si no llega a rellenar un estante, ¿cuántas mochilas pondrá en él para que estén todas las mochilas en las estanterías?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Carmen coloca en las estanterías del almacén 76 mochilas con ruedas y 94 sin ruedas.
  - En cada estante pone 24 mochilas.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Incógnitas:

  - Número de estantes que llena.
  - Número de mochilas que le sobran, es decir, con cuántas no llenará otro estante.

B) ¿El problema es resoluble?

Podemos ir poniendo las mochilas una a una en las estanterías, hasta que las hayamos puesto todas, o contándolas de 24 en 24, hasta que las hayamos contado todas. En ese momento, contaremos el número de estantes llenos de mochilas, o cuántas veces hemos contado 24 mochilas, y sabremos cuántos estantes llena Carmen.

Finalmente, contaremos las mochilas con las que no hemos llenado otro estante, o con cuántas mochilas no hemos podido llegar a contar hasta 24, que serán las que le sobran, las que no llenan otro estante.

Así contestaremos las preguntas, por lo que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Calcular el número total de mochilas que tenemos sumando el número de mochilas con ruedas y sin ruedas.
b) Al ir colocando 24 mochilas en cada estante estamos repartiendo en partes equipotentes, o al ir contándolas de 24 en 24, en cualquier caso, numéricamente lo que estamos haciendo es dividir, el número total de mochilas que tenemos, por 24, por lo que como segundo paso haremos esta división.
c) El cociente de la división anterior será el número de estantes que llena Carmen y, el resto de la división, cuántas mochilas le sobran, cuántas no llenan otro estante.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 76 + 94 = 170 mochilas en total.

b) 170 |24
  2   7

c) Carmen llena 7 estantes y le sobran 2 mochilas, o con 2 mochilas no llena otro estante.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Carmen en cada estante coloca, redondeando, 25 mochilas; si fueran 150 mochilas en total, llenaría 6 estantes, y si fueran 200 mochilas en total, llenaría 8 estantes. Como pone solo una mochila menos en cada estante y hay 170 mochilas en total, el número de estantes que llenaría debería ser, aproximadamente, entre 6 y 8, como es el caso, por lo que pensamos que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

La operación realizada para encontrar la solución del problema ha sido una división, por lo que, para comprobar la corrección de los resultados, haremos la prueba de la división:

$24 \cdot 7 + 2 = 168 + 2 = 170.$

Por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución podría ser la misma.

Problema D.2

En una ferretería se venden clavos en cajas de tres tamaños diferentes. La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta el doble que la pequeña. Si compras una caja de cada medida, te llevas 350 unidades. ¿Cuántos clavos tiene cada caja?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - En una ferretería se venden clavos en cajas de tres tamaños diferentes.
  - La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta el doble que la pequeña.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Si compras una caja de cada medida, te llevas 350 unidades.

- Incógnitas:
  - Número de clavos que tiene cada caja.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «G» a la cantidad de clavos de la caja grande, «M» a la cantidad de clavos de la caja mediana y «P» a la de la pequeña, siendo G, M y P números naturales, entonces tenemos que los datos se traducen en el sistema de ecuaciones $\left.\begin{cases} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{cases}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left.\begin{cases} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} G = 2M \\ M = 2P \\ 2M + 2P + P = 350 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} G = 2M \\ M = 2P \\ 2(2P) + 2P + P = 350 \end{cases}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{cases} G = 2M \\ M = 2P \\ 4P + 2P + P = 350 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} G = 2M \\ M = 2P \\ 7P = 350 \end{cases}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como P será un número natural, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left.\begin{cases} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{cases}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left.\begin{cases} G = 2M \\ M = 2P \\ 7P = 350 \end{cases}\right\}$.

De la ecuación 7P = 350 obtenemos P = 350 : 7 = 50.
Entonces, sustituyendo en las otras dos ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} G = 2M \\ M = 2P \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} G = 2M \\ M = 2\cdot 50 = 100 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} G = 2\cdot 100 = 200 \\ M = 100 \end{cases}\right\}.$$

Comprobamos que el sistema $\left.\begin{cases} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 350 \end{cases}\right\}$ está bien resuelto:

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

$$\left.\begin{cases} G = 200;\ 2\cdot M = 2\cdot 100 = 200 \\ M = 100;\ 2\cdot P = 2\cdot 50 = 100 \\ G + M + P = 200 + 100 + 50 = 350 \end{cases}\right\}.$$

Efectivamente, el sistema está bien resuelto, por lo tanto, la solución es: cantidad de clavos de la caja grande, 200; cantidad de clavos de la caja mediana, 100, y cantidad de clavos de la pequeña, 50.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí, porque son números naturales correspondientes a cajas de tres tamaños diferentes y que cumplen los datos del problema.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», en concreto, duplicaremos los datos, por lo que consideramos el nuevo problema: «*En una ferretería se venden clavos en cajas de tres medidas diferentes. La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta, el doble que la pequeña. Si compras una caja de cada medida, te llevas 700 unidades. ¿Cuántos clavos tiene cada caja?*». Esperamos que el número de clavos de cada caja sea el doble: cantidad de clavos de la caja grande, 400, de la caja mediana, 200, y de la pequeña, 100.

Hacemos los cálculos necesarios:

$$\left.\begin{cases} G = 2\cdot M \\ M = 2\cdot P \\ G + M + P = 700 \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} M = 2P \\ 2M + M + P = 700 \end{cases}\right\} \rightarrow\ 2(2P) + 2P + P = 700 \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 4P + 2P + P = 700 \rightarrow 7P = 700\ \rightarrow\ P = 100.$$

$M = 2 \cdot 100 = 200 \rightarrow G = 2 \cdot 200 = 400.$

Como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - En una ferretería se venden clavos en cajas de tres tamaños diferentes.
  - La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta el doble que la pequeña.
  - Si compras una caja de cada medida, te llevas 350 unidades.
- Incógnitas:
  - Número de clavos que tiene cada caja.

B) ¿El problema es resoluble?

La suma de clavos de las tres cajas es 350, luego de entrada consideraremos un número cuyo triple se aproxime a 350 y, como 350 dividido por 3 es, aproximadamente, 117, esta podría ser la cantidad de clavos de la caja mediana.

Como el número de clavos de la caja mediana es doble que el de la pequeña, este número deberá ser par, por lo tanto, consideramos que la cantidad de clavos de la caja mediana es 116, por lo que la de la caja pequeña sería 116 : 2 = 58 clavos y la de la caja grande 116 · 2 = 232 clavos.

La suma de las tres cantidades sería 58 + 116 + 232 = 406 clavos, mayor que 350 clavos.

La suma anterior es bastante mayor que 350, por lo que ahora consideramos que el número de clavos de la caja mediana es 100, luego, la de la pequeña sería 50 y la de la grande 200.

La suma de las tres cantidades sería 50 + 100 + 200 = 350 clavos, como queremos, luego el problema es resoluble, ya que estas cantidades son una solución del problema.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Seguiremos haciendo pruebas con números que satisfacen los datos del enunciado para ver si hay más soluciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Si la cantidad de clavos de la caja mediana es 100, la suma de las tres cantidades es 350 clavos; así pues, probaremos con un número menor para la caja mediana, y también otro mayor, pero siempre números pares, por lo que hemos justificado antes.

Cuando la cantidad de clavos de la caja mediana fuera de 98, la cantidad de clavos de la caja pequeña sería de 49 y la de la caja grande de 196. La suma del número de clavos de las tres cajas sería 49 + 98 + 196 = 343 clavos, que es menos que 350 clavos.

Si la cantidad de clavos de la caja mediana fuera 102, la cantidad de clavos de la caja pequeña sería de 51 y la de la caja grande de 204. La suma del número de clavos de las tres cajas sería 51 + 102 + 204 = 357 clavos, que es más que 350 clavos.

Por lo tanto, no vale la pena continuar probando con otras cantidades de clavos para la caja mediana menores de 100, ya que la suma siempre será menor que 350, y tampoco vale la pena continuar probando con otras cantidades de clavos para la caja mediana mayores de 100, ya que la suma siempre será mayor que 350, por lo que creemos que podemos afirmar que solo hay una solución: la caja pequeña tendrá 50 clavos, la caja mediana 100 clavos y la caja grande 200 clavos.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí porque son números naturales correspondientes a cajas de tres tamaños diferentes y que cumplen los datos del problema.

B) Comprobar la solución

Aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la cantidad de clavos de la caja pequeña, 50 clavos (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la cantidad total de clavos si compramos una caja de cada tamaño (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*En una ferretería se venden clavos en cajas de tres tamaños diferentes. La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta el doble que la pequeña. Sabemos que la caja pequeña tiene 50 clavos. Si compras una caja de cada medida, ¿cuántos clavos compras en total?*». Esperamos que el número total de clavos sea de 350.

Hacemos los cálculos necesarios:

- Cantidad de clavos de la caja mediana: $50 \cdot 2 = 100$.
- Cantidad de clavos de la caja grande: $100 \cdot 2 = 200$.
- Suma del número de clavos de todas las cajas: $50 + 100 + 200 = 350$; como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema D.3

Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre las edades de los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan.
  - Rosa tiene 26 años más que su hijo Alberto.
  - Entre las edades de los tres suman 98 años.
- Incógnitas:
  - La edad de cada uno.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «R» a la edad de Rosa, «J» a la de su padre Juan y «A» a la de su hijo Alberto, siendo R, J y A números naturales, entonces tenemos que los datos se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} R - J = -25 \\ R - A = 26 \\ R + J + A = 98 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} R - J = -25 \\ A - J = -51 \\ 2J + A = 123 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} J - R = 25 \\ J - A = 51 \\ 2J + A = 123 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} J - R = 25 \\ J - A = 51 \\ 3J = 174 \end{array}\right\}.$$

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como J será un número natural, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{array}{l} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{array}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{array}{l} J - R = 25 \\ J - A = 51 \\ 3J = 174 \end{array}\right\}$.

De la ecuación 3J = 174, obtenemos J = 174 : 3 = 58.
Entonces, sustituyendo en las otras dos ecuaciones:
$\left\{\begin{array}{l} 58 - R = 25 \\ 58 - A = 51 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -R = 25 - 58 = -33 \\ -A = 51 - 58 = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} R = 33 \\ A = 7 \end{array}\right\}$.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{array}{l} R = J - 25 \\ R = 26 + A \\ R + J + A = 98 \end{array}\right\}$ está bien resuelto:

$\left\{\begin{array}{l} R = 33;\ J - 25 = 58 - 25 = 33 \\ R = 33;\ 26 + A = 26 + 7 = 33 \\ R + J + A = 33 + 58 + 7 = 98 \end{array}\right\}$.

Efectivamente el sistema está bien resuelto, por lo tanto, la solución es: edad de Rosa, 33 años; edad de su padre, Juan, 58 años, y edad de su hijo Alberto, 7 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí porque son números naturales correspondientes a la edad de tres persones que pueden ser una mujer, su padre y su hijo.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la edad de Rosa (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la suma de las edades (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema «*Rosa tiene 33 años, 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. ¿Cuál es la suma de las edades de los tres*?». Esperamos que la suma de las edades sea 98 años.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hacemos los cálculos necesarios:

Rosa tiene 25 años menos que su padre Juan, luego, edad de Juan: R = = J – 25 → 33 = J – 25 → J = 33 + 25 = 58 años.

Rosa tiene 26 años más que su hijo Alberto, entonces, edad de Alberto: R = = 26 + A → 33 = 26 + A → A = 33 – 26 = 7 años.

La suma de las edades de los tres será: R + J + A = 33 + 58 + 7 = 98 años; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan.
  - Rosa tiene 26 años más que su hijo Alberto.
  - Entre las edades de los tres suman 98 años.
- Incógnitas:
  - La edad de cada uno.

B) ¿El problema es resoluble?

Haremos pruebas con edades que satisfacen las condiciones de la relación de edades entre cada dos personas y miraremos si la suma puede dar 98 años.

Como Rosa es la persona cuya edad es el referente, empezaremos asignándole una edad.

Tiene 26 años más que su hijo, luego suponemos que ella tiene 27 años, por lo que su hijo, Alberto, tendría 1 año, y entonces, el padre de Rosa, Juan, tendría 52 años. Entre los tres suman: 27 + 1 + 52 = 80 años, menos que el dato del enunciado.

Si Rosa tuviera 30 años, su hijo tendría 4 años y su padre, 55 años. Entre los tres sumarían: 30 + 4 + 55 = 89 años, menos que el dato del enunciado.

Si Rosa tuviera 35 años, su hijo tendría 9 años y su padre, 60 años. Entre los tres sumarían: 35 + 9 + 60 = 104 años, más que el dato del enunciado.

Vemos, pues, que con unas edades posibles la suma no llega a los 98 años y con otras se pasa, por lo tanto, esperamos que haya unas edades, respetando

las relaciones del enunciado, cuya suma sea 98 años; es decir, esperamos que el problema sea resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Seguiremos haciendo pruebas con edades que satisfacen las condiciones de la relación de edades entre cada dos personas y miraremos si la suma da 98 años.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Si Rosa tuviera 30 años, la suma de las edades es menos de 98 años, y si Rosa tuviera 35 años, la suma de las edades es más de 98 años, por lo tanto, probablemente, la edad de Rosa está entre 30 y 35 años.

Probamos con 32 años. Su hijo tendría 6 años y su padre, 57 años. Entre los tres sumarían: 32 + 6 + 57 = 95 años, menos que el dato del enunciado.

Si Rosa tuviera 33 años, su hijo tendría 7 años y su padre, 58 años. Entre los tres sumarían: 33 + 7 + 58 = 98 años, como debería ser; por lo tanto, la solución es: edad de Rosa, 33 años; edad de su padre, Juan, 58 años, y edad de su hijo Alberto, 7 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Creemos que sí, porque son números naturales correspondientes a la edad de tres persones que pueden ser una mujer, su padre y su hijo.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución es correcta, aplicando el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la edad de Rosa (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la suma de las edades (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema «*Rosa tiene 33 años, 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. ¿Cuál es la suma de las edades de los tres*?». Esperamos que la suma de las edades sea 98 años.

Hacemos los cálculos necesarios:

Rosa tiene 25 años menos que su padre Juan, luego la edad de Juan es: 33 + + 25 = 58 años.

Rosa tiene 26 años más que su hijo Alberto, entonces, la edad de Alberto es: 33 – 26 = 7 años.

La suma de las edades de los tres será: 33 + 58 + 7 = 98 años; como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema D.4

En un partido de baloncesto se han vendido un total de 1.200 entradas, de las cuales, 525 se han vendido a 5 euros cada una; 490 entradas, a 6 euros cada una, y el resto, a 7 euros cada una. ¿Cuál ha sido el total recaudado en dicho partido?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Se han vendido un total de 1.200 entradas.
  - 525 entradas se han vendido a 5 euros cada una.
  - 490 entradas se han vendido a 6 euros cada una.
  - El resto de entradas se han vendido a 7 euros cada una.
- Incógnitas:
  - Dinero total recaudado en el partido.

B) ¿El problema es resoluble?

Si sumamos la cantidad de entradas vendidas a 5 € y 6 € y la restamos a la cantidad total de entradas vendidas, obtendremos la cantidad de entradas vendidas a 7 €.

Multiplicando la cantidad de entradas de cada tipo por su precio, respectivamente, obtendremos el dinero recaudado con cada uno de los tres tipos de entradas, entonces, sumando estas tres cantidades obtendremos el dinero recaudado en el partido.

Por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Calcularemos las entradas vendidas a 7 €, para ello sumaremos las entradas de 5 € y 6 € y restaremos esta cantidad del total de entradas vendidas.
b) Calcularemos el dinero recaudado con cada tipo de entrada, para ello multiplicamos el número de entradas de cada tipo por su precio.
c) Sumaremos el dinero recaudado con cada tipo de entrada y obtendremos el dinero total recaudado.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 525 + 490 = 1.015 entradas de 5 € o 6 € → 1.200 – 1.015 = 185 entradas de 7 €.
b) 525 · 5 = 2.625 € recaudados con las entradas de 5 €.
490 · 6 = 2.940 € recaudados con las entradas de 6 €.
185 · 7 = 1.295 € recaudados con las entradas de 7 €.
c) 2.625 + 2.950 + 1.295 = 6.860 € de recaudación total en el partido.

Solución: 6.860 € de recaudación total en el partido.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Si las 1.200 entradas se hubieran vendido todas a 5 € se habrían recaudado 6.000 €, y si se hubieran vendido todas a 7 € se habrían recaudado 8.400 €; como la solución obtenida vendiendo unas entradas a 5 €, otras a 6 € y el resto a 7 € es 6.680 €, cantidad comprendida entre 6.000 € y 8.400 €, la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, vamos a aplicar el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos el total recaudado en el partido, 6.860 € (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y vamos a calcular cuántas entradas se han vendido en total (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En un partido de baloncesto se han recaudado 6.860 €, 525 entradas se han vendido a 5 euros cada una; 490 entradas, a 6 euros cada una, y el resto, a 7 euros cada una. ¿Cuántas entradas se han vendido en total?*». Esperamos que la respuesta sea 1.200 entradas.

Hacemos los cálculos:

Multiplicamos el número de entradas vendidas a 5 € por el precio de cada una de ellas: 525 · 5 = 2.625 € recaudados con las entradas de 5 €.

Hacemos lo mismo con las entradas vendidas a 6 €: 490 · 6 = 2.940 €.

Sumamos las dos cantidades anteriores para saber el dinero recaudado con las entradas de 5 € y de 6 €: 2.625 + 2.940 = 5.565 €.

Para saber el dinero recaudado con las entradas de 7 € restaremos, al dinero recaudado en total en el partido, el dinero recaudado con las entradas de 5 € y de 6 €: 6.860 – 5.565 = 1.295 € recaudados con las entradas de 7 €.

Calculamos el número de entradas de 7 € dividiendo lo recaudado con la venta de este tipo de entradas entre el precio de cada una de ellas 1.295 : 7 = = 185 entradas de 7 €.

Obtenemos el total de entradas vendidas sumando la cantidad de entradas vendidas de cada tipo: 525 + 490 + 185 = 1.200 entradas vendidas en total.

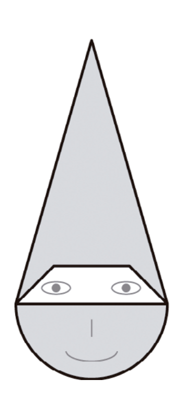
Como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

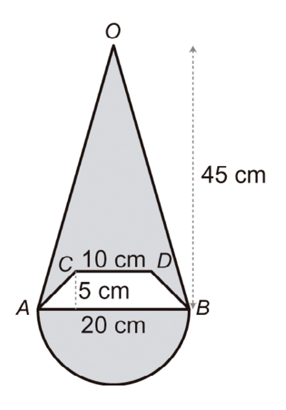
❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Como alumnado de Educación Primaria se resolvería igual que como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

Problema D.5

Con motivo del Carnaval, y para que los niños y las niñas de 3.º de Primaria se disfracen de duendes, se ha decidido hacer una careta como la de la figura:





Para comprar el material nos preguntamos: «¿Cuánto mide la superficie de la careta?».

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El dibujo de la careta con las medidas de las distintas partes que la configuran.
- Incógnitas:
  - Medida de la superficie de la careta.

B) ¿El problema es resoluble?

La careta está compuesta por un semicírculo y un triángulo isósceles, siendo el diámetro del semicírculo la base del triángulo isósceles.

Del semicírculo conocemos la medida del diámetro y del triángulo isósceles la medida de la base y de la altura, por lo que podemos dibujar las dos figuras con los instrumentos necesarios o programas de geometría dinámica.

Al ponerse la careta el alumnado de 3.º de Primaria, para poder ver el exterior, el entorno, en la figura que forman el semicírculo y el triángulo isósceles tenemos que recortar y quitar un trapecio isósceles, del que también disponemos de las medidas, por lo que podemos dibujarlo.

Finalmente, con un acetato cuadriculado en centímetros cuadrados o con centímetros cuadrados de papel, tela, etc., podemos medir la superficie de la careta, por lo que creemos que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como conocemos las medidas del semicírculo, del triángulo isósceles y del trapecio isósceles, calcularemos:

a) El área del semicírculo, que llamaremos «A_{SC}».
b) El área del triángulo isósceles, que llamaremos «A_{TRI}».
c) El área del trapecio isósceles, que llamaremos «A_{TRA}».
d) Finalmente, sumaremos las áreas del semicírculo y del triángulo isósceles, y le restaremos el área del trapecio isósceles, con lo que tendremos la medida de la superficie de la careta, que llamaremos «A_C».

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) A_{SC} = ½ (π · 10^2) = ½ (π · 100) = 50 · π cm^2
b) A_{TRI} = ½ (20 · 45) = ½ (900) = 450 cm^2
c) A_{TRA} = [½ (20 + 10)] · 5 = [½ (30)] · 5 = ½ 150 = 75 cm^2
d) $A_C = (A_{SC} + A_{TRI}) – A_{TRA}$ = (50 · π + 450) – 75 = (157 + 450) – 75 = 532 cm^2

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

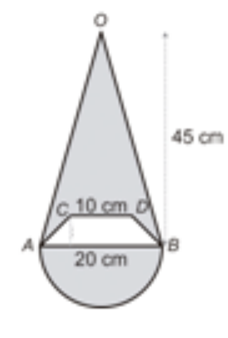
La careta es parte de un rectángulo de 55 cm de altura (10 cm del radio del semicírculo y 45 cm de altura del triángulo isósceles) y 20 cm de ancho (los 20 cm del diámetro del semicírculo) y es mayor que el círculo completo.

El área del rectángulo es 55 · 20 cm^2 = 1.100 cm^2, mayor que la medida de la superficie de la careta (532 cm^2) y, el área del círculo es 314 cm^2, menor que la medida de la superficie de la careta, por lo que creemos que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, elegimos la de «cambio de dato por incógnita y viceversa». Supongamos que conocemos la medida de la superficie de la careta, 532 cm^2 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la medida de la altura del trapecio isósceles (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, el enunciado del nuevo problema es: «*Con motivo del Carnaval, y para que los niños de 3.º de Primaria se disfracen de duendes, se ha decidido hacer una careta como la de la figura. Si la careta de cartón mide 532 cm², ¿cuál es la medida de la altura del trapecio isósceles que se recorta para poder ver?*». Esperamos que la respuesta sea 5 cm.





ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hacemos los cálculos necesarios:

Por los cálculos de la 3.ª fase sabemos que $A_{SC} = 50 \cdot \pi$ cm² y $A_{TRI} = 450$ cm².

Entonces, $A_C = 532$ cm² $= (A_{SC} + A_{TRI}) - A_{TRA} = (50 \cdot \pi + 450) - A_{TRA} = (50 \cdot \pi + 450) - A_{TRA} = (157 + 450) - A_{TRA} = 607 - A_{TRA} \rightarrow A_{TRA} = 607 - 532 = 75$ cm².

Llamamos «a» a la altura del trapecio, tenemos $A_{TRA} = 75$ cm² = [½ (20 + + 10)] · a = [½ (30)] · a = 15 · a → a = 75 : 15 = 5 cm.

Como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Según el Decreto 108/2014, en el bloque 4: Geometría, del área de Matemáticas, en el 5.º curso de Educación Primaria, encontramos el contenido «Fórmulas para calcular áreas de paralelogramos y triángulos», y en el 6.º curso de Educación Primaria, los contenidos «El área del círculo» y «Cálculo del área y perímetro de figuras planas y composiciones de estas», criterio de evaluación BL4.2 «Calcular el área y el perímetro de cualquier figura plana (en entornos naturales, artísticos, arquitectónicos, etc.) utilizando diversas estrategias (fórmulas, descomposición, etc.) para explicar el mundo que nos rodea», por lo que se puede hacer el cálculo del área del semicírculo, del triángulo isósceles y, concretamente, el área del trapecio isósceles se puede calcular descomponiendo el trapecio isósceles en un rectángulo y dos triángulos rectángulos iguales.

Por lo que creemos que el problema se puede plantear en 6.º curso de Educación Primaria.

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El dibujo de la careta con las medidas de las distintas partes que la configuran.
- Incógnitas:
  - Medida de la superficie de la careta.

B) ¿El problema es resoluble?

La careta está compuesta por un semicírculo y un triángulo isósceles, siendo el diámetro del semicírculo la base del triángulo isósceles.

Del semicírculo conocemos la medida del diámetro y del triángulo isósceles la medida de la base y de la altura, por lo que podemos dibujar las dos figuras con los instrumentos necesarios o programas de geometría dinámica.

Al ponerse la careta el alumnado de 3.º de Primaria, para poder ver el exterior, el entorno, en la figura que forman el semicírculo y el triángulo isósceles tenemos que recortar y quitar un trapecio isósceles, del que también tenemos las medidas, por lo que podemos dibujarlo.

Finalmente, con un acetato cuadriculado en centímetros cuadrados o con centímetros cuadrados de papel, tela, etc., podemos medir la superficie de la careta, por lo que creemos que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como conocemos las medidas del semicírculo, del triángulo isósceles y del trapecio isósceles:

a) Calcularemos el área del semicírculo, que llamaremos «A_{SC}».
b) Calcularemos el área del triángulo isósceles, que llamaremos «A_{TI}».
c) El trapecio isósceles lo descompondremos en un rectángulo y dos triángulos rectángulos iguales. El rectángulo tendrá por base, la base menor del trapecio, y por altura, la altura del trapecio. Los triángulos rectángulos tendrán por base la mitad de la diferencia entre la base mayor y la base menor del trapecio, y por altura, la altura del trapecio.
Calcularemos el área del trapecio isósceles, que llamaremos «A_{TRA}», sumando el área del rectángulo, que llamaremos «A_{REC}», y las de los dos triángulos rectángulos iguales, que llamaremos «A_{TR}».
d) Finalmente, sumaremos las áreas del semicírculo y del triángulo isósceles, y le restaremos el área del trapecio isósceles, con lo que tendremos la medida de la superficie de la careta, que llamaremos «A_C».

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $A_{SC} = ½ (\pi \cdot 10^2) = ½ (\pi \cdot 100) = ½ (314) = 157 \text{ cm}^2$
b) $A_{TI} = ½ (20 \cdot 45) = ½ (900) = 450 \text{ cm}^2$
c) $A_{REC} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$, $A_{TR} = ½\ 5 \cdot 5 = 12{,}5 \text{ cm}^2$
$A_{TRA} = A_{REC} + 2 \cdot A_{TR} = 50 + 2 \cdot 12{,}5 = 50 + 25 = 75 \text{ cm}^2$
d) $A_C = (A_{SC} + A_{TI}) – A_{TRA} = (157 + 450) – 75 = 532 \text{ cm}^2$

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

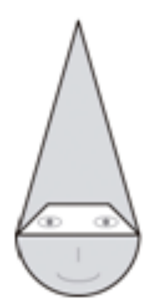
A) ¿La solución es razonable?

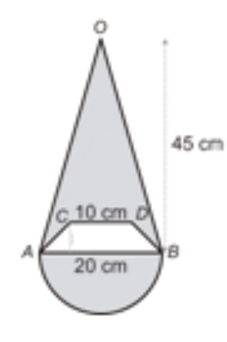
La careta es parte de un rectángulo de 55 cm de altura (10 cm del radio del semicírculo y 45 cm de altura del triángulo isósceles) y 20 cm de ancho (los 20 cm del diámetro del semicírculo) y es mayor que el círculo completo.

El área del rectángulo es 55 · 20 cm^2 = 1.100 cm^2, mayor que la medida de la superficie de la careta (532 cm^2) y, el área del círculo es 314 cm^2, menor que la medida de la superficie de la careta, por lo que creemos que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, elegimos la de «cambio de dato por incógnita y viceversa». Supongamos que conocemos la medida de la superficie de la careta, 532 cm^2 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la medida de la altura del trapecio isósceles (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, el enunciado del nuevo problema es: «*Con motivo del Carnaval, y para que los niños de 3.º de Primaria se disfracen de duendes, se ha decidido hacer una careta como la de la figura. Si la careta de cartón mide 532 cm^2, ¿cuál es la medida de la altura del trapecio isósceles que se recorta para poder ver?*». Esperamos que la respuesta sea 5 cm.

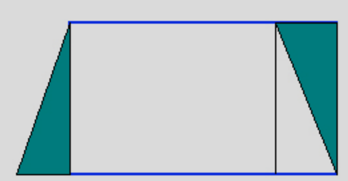




ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Hacemos los cálculos necesarios:

Por los cálculos de la 3.ª fase sabemos que, $A_{SC} = 157$ cm² y $A_{TI} = 450$ cm². Entonces, $A_C = (A_{SC} + A_{TI}) - A_{TRA} \rightarrow 532 = (157 + 450) - A_{TRA} \rightarrow 532 = 607 - A_{TRA} \rightarrow A_{TRA} = 607 - 532 = 75$ cm².



En la descomposición que hemos hecho del trapecio isósceles, si cogemos uno de los triángulos rectángulos iguales (verde oscuro), lo giramos 180º y lo componemos con el otro triángulo rectángulo, haciendo coincidir las dos hipotenusas, el trapecio isósceles se convierte en un rectángulo, por lo que las dos figuras tendrán la misma superficie y, por lo tanto, la misma área, 75 cm².

Este rectángulo tiene una base que mide (10 + 5) cm y de altura, la del trapecio isósceles; por tanto, el producto de la medida de la base, 15 cm, por la medida de la altura, nos dará el área del rectángulo, 75 cm². Entonces, la medida de la altura es un número que multiplicado por 15 da 75, por lo tanto, medida de la altura = 75 : 15 = 5 cm.

Como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema D.6

Un apicultor tiene 65 colmenas con una producción de dos cosechas al año, a razón de 9 kilos de miel por colmena en cada cosecha. La miel se envasa en tarros de medio kilo y se comercializa en cajas de 6 tarros que se venden a 24 euros la caja. ¿Qué ingresos anuales proporciona el colmenar?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El apicultor tiene 65 colmenas.
  - Tiene una producción de dos cosechas al año.

- Recolecta 9 kilos de miel por colmena en cada cosecha.
- La miel se envasa en tarros de medio kilo.
- La miel se comercializa en cajas de 6 tarros que se venden a 24 euros la caja.

• Incógnitas:

- Los ingresos anuales que proporciona el colmenar.

B) ¿El problema es resoluble?

Cada colmena proporciona 9 kilos de miel en una cosecha y se hacen dos cosechas al año, por lo tanto, sabemos cuántos kilos de miel proporciona cada colmena en un año.

Si el apicultor tiene 65 colmenas, podemos saber cuántos kilos de miel recolecta en un año.

Como la miel se envasa en tarros de medio kilo y cada 6 tarros hacen una caja, sabiendo que cada caja se vende a 24 euros, podemos saber por cuánto se vende cada tarro de medio kilo y, por lo tanto, a cuánto se vende el kilo de miel.

Si podemos saber cuántos kilos de miel recolecta en un año y a cuánto se vende el kilo de miel, multiplicaríamos estas cantidades para calcular los ingresos de un año, por lo que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Multiplicaremos 9 kilos de miel en una cosecha por dos cosechas al año, y sabremos cuántos kilos de miel proporciona cada colmena en un año.
b) Multiplicaremos los kilos de miel por colmena en un año por las 65 colmenas, calculando así la cantidad de kilos que obtiene el apicultor en un año.
c) Dividiremos 24 euros por 6 y obtendremos el precio de un tarro de miel de medio kilo.
d) Obtendremos el precio del kilo de miel multiplicando el valor anterior por 2.
e) Por último, multiplicaremos la cantidad de kilos de miel que obtiene en un año por el precio del kilo de miel, calculando los ingresos del apicultor en un año.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 9 · 2 = 18 kilos de miel por colmena en un año.
b) 18 · 65 = 1.170 kilos de miel en un año.
c) 24 : 6 = 4 € precio de medio kilo de miel.
d) 4 · 2 = 8 € precio del kilo de miel.
e) 1.170 · 8 = 9.360 € en un año.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Como en un año obtiene 1.170 kilos de miel, aproximadamente 1.100 kilos, que a 8 € el kilo serían 8.800 €, por lo que el resultado 9.360 € es una cantidad razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, duplicaremos el dato «cantidad de colmenas que tiene el apicultor» por lo que consideramos el siguiente problema: «*Un apicultor tiene 130 colmenas con una producción de dos cosechas al año, a razón de 9 kilos por colmena en cada cosecha. La miel se envasa en tarros de medio kilo y se comercializa en cajas de 6 tarros que se venden a 24 euros la caja. ¿Qué ingresos anuales proporciona el colmenar?*». Esperamos que los ingresos sean de 18.720 €, el doble que en el problema original.

Hacemos los cálculos correspondientes:

a) 9 · 2 = 18 kilos de miel por colmena en un año.
b) 18 · 130 = 2.340 kilos de miel en un año.
c) 24 : 6 = 4 € precio de medio kilo de miel.
d) 4 · 2 = 8 € precio del kilo de miel.
e) 2.340 · 8 = 18.720 € en un año.

Como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El apicultor tiene 65 colmenas.
  - Tiene una producción de dos cosechas al año.
  - Recolecta 9 kilos de miel por colmena en cada cosecha.
  - La miel se envasa en tarros de medio kilo.
  - La miel se comercializa en cajas de 6 tarros que se venden a 24 euros la caja.

- Incógnitas:
    - Los ingresos anuales que proporciona el colmenar.

B) ¿El problema es resoluble?

Como en un año el apicultor tiene dos cosechas, veremos si podemos saber cuántos ingresos tiene en una cosecha y luego los multiplicaremos por dos para calcular el dinero de un año.

Cada colmena proporciona 9 kilos de miel en una cosecha, como tiene 65 colmenas podemos saber cuántos kilos de miel recolecta en una cosecha.

Como la miel se envasa en frascos de medio kilo, con cada kilo de miel llenamos dos tarros, por tanto, si sabemos cuántos kilos de miel ha sacado sabremos cuántos tarros envasará.

Sabiendo cuantos tarros tiene, como cada 6 tarros llenan una caja, podemos calcular cuántas cajas comercializará.

Y como cada caja se vende a 24 euros, podremos calcular cuántos ingresos obtendrá en una cosecha.

Entonces, como ya hemos dicho, multiplicaríamos por dos los ingresos que obtendrá en una cosecha para calcular el dinero de un año, por lo que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Multiplicaremos el número de colmenas, 65, por los kilos de miel que se recolecta en cada una, 9, para saber cuántos kilos de miel saca en una cosecha.
b) Como con cada kilo de miel llenamos dos tarros, multiplicaremos por dos los kilos de miel y sabremos la cantidad de tarros de medio kilo que obtiene.
c) Dividiremos por 6 la cantidad de tarros y sabremos cuántas cajas comercializa en una cosecha.
d) La cantidad de cajas obtenida en el tercer paso la multiplicaremos por 24 € y sabremos los ingresos que tiene en una cosecha.
e) Por último, multiplicaremos por dos los ingresos de una cosecha para calcular los ingresos de un año.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $65 \cdot 9 = 585$ kilos de miel en una cosecha.
b) $585 \cdot 2 = 1.170$ tarros de medio kilo de miel en una cosecha.
c) $1.170 : 6 = 195$ cajas en una cosecha.
d) $195 \cdot 24 = 4.680$ € de ingresos en una cosecha.
e) $4.680 \cdot 2 = 9.360$ € de ingresos en un año.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Como una caja de 6 botes de medio kilo la vende a 24 €, el medio kilo lo vende a 4 €, por lo tanto, el kilo de miel lo vende a 8 €, y en un año recolecta «585 · 2» kilos de miel, aproximadamente 1.100 kg, que a 8 €/kg serían 8.800 €, por lo que, creemos que el resultado 9.360 € es una cantidad razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que, suponemos que conocemos los ingresos anuales, 9.360 € (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y vamos a calcular a qué precio vende cada caja (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Un apicultor tiene 65 colmenas con una producción de dos cosechas al año, a razón de 9 kilos de miel por colmena en cada cosecha. La miel se envasa en tarros de medio kilo y se comercializa en cajas de 6 tarros, habiendo obtenido unos ingresos anuales de 9.360 €. ¿A qué precio vende cada caja?*». Esperamos que el precio sea de 24 €.

Hacemos los cálculos:

Sabemos por los cálculos hechos en la 3.ª fase que en una cosecha recolecta 195 cajas de miel, por lo que, como hace dos cosechas en un año recolecta 195 · 2 = 390 cajas de miel en dos cosechas.

Si vendiendo las 390 cajas de miel ingresa 9.360 €, cada caja de 6 tarros de miel la vende a 9.360 : 390 = 24 €.

Como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

Problema D.7

Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y este dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que la suma de sus tres edades es 36 años.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio.
  - Antonio es dos años menor que su hermana Blanca.
  - La suma de sus tres edades es 36 años.
- Incógnitas:
  - La edad de cada uno.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «x» a la edad de Blanca, la edad de Antonio será «x – 2» y la edad de Teresa es «(x – 2) + 7», entonces, los datos del problema se pueden traducir en la siguiente ecuación lineal de una incógnita $[(x-2)+7]+(x-2)+x = 36$ que es resoluble, por lo que, posiblemente, el problema también lo será.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Resolveremos la ecuación anterior para obtener la edad de Blanca.
b) Calcularemos la edad de Antonio restándole 2 años a la edad de Blanca.
c) Calcularemos la edad de Teresa sumándole 7 a la edad de Antonio.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $[(x-2)+7]+(x-2)+x=36 \rightarrow [x+5]+(x-2)+x=36 \rightarrow x+5+x-2+x=36 \rightarrow 3x+3=36 \rightarrow 3x=36-3=33 \rightarrow x=33:3=11$
Verificamos que la ecuación $[(x-2)+7]+(x-2)+x=36$ está bien resuelta sustituyendo el valor encontrado:
$[(x-2)+7]+(x-2)+x=[(11-2)+7]+(11-2)+11=[9+7]+9+11=16+9+11=36$.
Vemos que, efectivamente, se verifica la ecuación, luego la ecuación está bien resuelta.
Por lo tanto, Blanca tiene 11 años.
b) Edad de Antonio: 11 – 2 = 9 años.
c) Edad de Teresa: 9 + 7 = 16 años.

Solución: Teresa tiene 16 años; Antonio, 9 años, y Blanca, 11 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

ISBN: 78-84-17900-59-5

Manuel Alcalde Esteban y Pedro Nieves Merideño
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Sí, ya que la suma de las edades es 36 y, como son tres hermanos, la media de las edades es 12 años, luego dado que las edades obtenidas son un poco mayor y/o un poco menor que 12, la solución obtenida es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la edad de Blanca, 11 años (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos cuánto suman las edades de los tres hermanos (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y este dos años menor que su hermana Blanca, que tiene 11 años. Calcula la suma de las edades de los tres hermanos*». Esperamos que la respuesta sea 36 años.

Hacemos los cálculos:

Blanca tiene 11 años, entonces, edad de Antonio: 11 – 2 = 9 años, y edad de Teresa: 9 + 7 = 16 años.

La suma de las edades de los tres hermanos es: 16 + 9 + 11 = 36 años; como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio.
  - Antonio es dos años menor que su hermana Blanca.
  - La suma de sus tres edades es 36 años.
- Incógnitas:
  - La edad de cada uno.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) ¿El problema es resoluble?

Vamos a verlo por tanteo.

Como Antonio tiene 7 años menos que Teresa, esta no puede tener menos de 8 años, entonces:

Edad de Teresa	Edad de Antonio = = edad de Teresa – 7	Edad de Blanca = = edad de Antonio + 2	Suma de las edades
8	8 – 7 = 1	1 + 2 = 3	8 + 1 + 3 = 12
9	9 – 7 = 2	2 + 2 = 4	9 + 2 + 4 = 15
10	10 – 7 = 3	3 + 2 = 5	10 + 3 + 5 = 18
11	11 – 7 = 4	4 + 2 = 6	11 + 4 + 6 = 21
12	12 – 7 = 5	5 + 2 = 7	12 + 5 + 7 = 24

Vemos en el tanteo que la suma de las edades siempre es un múltiplo de 3, mayor que 12, y como la suma real de las edades es 36, que es un número múltiplo de 3 y mayor que 12, creemos que encontraremos edades que cumplan los datos del problema, por lo que creemos que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Continuaremos el tanteo.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Edad de Teresa	Edad de Antonio = = edad de Teresa – 7	Edad de Blanca = = edad de Antonio + 2	Suma de las edades
13	13 – 7 = 6	6 + 2 = 8	13 + 6 + 8 = 27
14	14 – 7 = 7	7 + 2 = 9	14 + 7 + 9 = 30
15	15 – 7 = 8	8 + 2 = 10	15 + 8 + 10 = 33
16	16 – 7 = 9	9 + 2 = 11	16 + 9 + 11 = 36

Las edades encontradas son: Teresa tiene 16 años; Antonio, 9 años, y Blanca, 11 años.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que son edades posibles de tres hermanos y la suma es 36.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la edad de Blanca, 11 años (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos cuánto suman las edades de los tres hermanos (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y este dos años menor que su hermana Blanca, que tiene 11 años. Calcula la suma de las edades de los tres hermanos*». Esperamos que la respuesta sea 36 años.

Hacemos los cálculos:

Blanca tiene 11 años, entonces, edad de Antonio: 11 – 2 = 9 años, y edad de Teresa: 9 + 7 = 16 años.

La suma de las edades de los 3 hermanos es: 16 + 9 + 11 = 36 años; como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema D.8

Al comenzar los estudios de Secundaria se hace a los estudiantes un test con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada cuestión contestada correctamente se les da 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un estudiante obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Test con 30 cuestiones.

- Por cada cuestión contestada correctamente se les da 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos.
- Un estudiante obtuvo en total 94 puntos.

• Incógnitas:

- Número de cuestiones que respondió correctamente.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «C» a la cantidad de cuestiones que respondió correctamente y «N» a la cantidad de cuestiones que respondió incorrectamente o no respondió, siendo C y N números naturales, entonces, tenemos que los datos se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 7 = 154 \end{matrix}\right\}$.

Que es un sistema compatible determinado, por lo que el sistema es resoluble y, como C será un número natural, entonces, posiblemente, el problema también será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

El sistema $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\}$, al triangularizarlo, lo hemos convertido en $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 7 = 154 \end{matrix}\right\}$.

De la ecuación $C \cdot 7 = 154$ obtenemos $C = 154 : 7 = 22$.

Entonces, sustituyendo en la otra ecuación: $22 + N = 30 \rightarrow N = 30 - 22 = 8$.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{matrix} C + N = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 94 \end{matrix}\right\}$ está bien resuelto:

$\left\{\begin{matrix} C + N = 22 + 8 = 30 \\ C \cdot 5 - N \cdot 2 = 22 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 110 - 16 = 94 \end{matrix}\right\}$.

Efectivamente, el sistema está bien resuelto, por lo tanto, la solución es: el estudiante respondió correctamente 22 cuestiones.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, porque es un número natural menor que 30, dado que la cantidad de puntos que obtuvo es inferior a 150.

B) Comprobar la solución

Aplicamos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la cantidad de cuestiones respondidas correctamente, 22 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la cantidad de puntos obtenidos (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*Al comenzar los estudios de Secundaria se hace al estudiantado un test con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada cuestión contestada correctamente se les da 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un estudiante respondió correctamente 22 cuestiones. ¿Cuántos puntos obtuvo?*». Esperamos que la respuesta sea 94 puntos.

Hacemos los cálculos necesarios:

Si respondió correctamente 22 cuestiones, entonces, 8 fueron las cuestiones incorrectas o no contestadas, por tanto, el número total de puntos que obtuvo fueron: 22 · 5 – 8 · 2 = 110 – 16 = 94.

Como esperábamos, luego creemos que el problema está correctamente resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Test con 30 cuestiones.
  - Por cada cuestión contestada correctamente se les da 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos.
  - Un estudiante obtuvo en total 94 puntos.

- Incógnitas:
  - Número de cuestiones que respondió correctamente.

B) ¿El problema es resoluble?

Si el estudiante hubiera respondido correctamente las 30 cuestiones habría obtenido 150 puntos, como en total obtuvo 94 puntos, no las respondió todas correctamente, por lo que haremos pruebas para ver si hay un número de respuestas correctas que proporcionen un total de 94 puntos.

Cada cuestión contestada correctamente da 5 puntos y el número 94 no es múltiplo de 5, suponemos pues, que los puntos obtenidos fueron 95, que serían los correspondientes a 95 : 5 = 19 cuestiones correctas. Por tanto, en este caso hipotético, habrían 11 cuestiones incorrectas o no contestadas, y los puntos obtenidos serían: 19 · 5 – 11 · 2 = 95 – 22 = 73, menos que los puntos obtenidos realmente.

Probaremos un caso, o más, con más respuestas correctas y, para observarlo mejor, ponemos el tanteo en una tabla:

Número cuestiones correctas	Número cuestiones incorrectas o no contestadas (30 – correctas)	Puntos	¿Puntos = = 94?
20	30 – 20 = 10	20 · 5 – 10 · 2 = 80	NO
23	30 – 23 = 7	23 · 5 – 7 · 2 = 101	NO

Vemos en la tabla que con 20 cuestiones correctas no llega a los 94 puntos y con 23 cuestiones correctas pasa de los 94 puntos, por lo que esperamos que haya un número de cuestiones correctas que proporcione un total de 94 puntos y, por tanto, que el problema tenga solución.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Agotaremos el tanteo.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número cuestiones correctas	Número cuestiones incorrectas o no contestadas (30 – correctas)	Puntos	¿Puntos = = 94?
21	30 – 21 = 9	21 · 5 – 9 · 2 = 87	NO
22	30 – 22 = 8	22 · 5 – 8 · 2 = 94	SÍ

Por lo tanto, 22 cuestiones respondidas correctamente es solución, y como con 21 y con 23 cuestiones respondidas correctamente, no llega o se pasa de 94 puntos, respectivamente, 22 cuestiones respondidas correctamente es la única solución.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, porque es un número natural menor que 30, dado que la cantidad de puntos que obtuvo es inferior a 150.

B) Comprobar la solución

Para comprobar la solución aplicamos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la cantidad de cuestiones respondidas correctamente, 22 (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la cantidad de puntos obtenidos (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*Al comenzar los estudios de Secundaria se hace al estudiantado un test con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada cuestión contestada correctamente se les da 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un estudiante respondió correctamente 22 cuestiones. ¿Cuántos puntos obtuvo?*». Esperamos que la respuesta sea 94 puntos.

Hacemos los cálculos necesarios:

Si respondió correctamente 22 cuestiones, entonces, 8 fueron las cuestiones incorrectas o no contestadas, por tanto, el número total de puntos que obtuvo fueron: $22 \cdot 5 – 8 \cdot 2 = 110 – 16 = 94$.

Como esperábamos, por tanto, pensamos que el problema está correctamente resuelto.

Problema D.9

En el Festival Internacional de Música de Benicàssim (FIB) se han conocido dos estudiantes del Grado de Matemáticas, ella es de Benicàssim y él de Gandía. Ella le pregunta a cuantos kilómetros está Gandía y él le dice: «Si a 288 le sumas el número de kilómetros el resultado es igual a tres veces el exceso del número de kilómetros sobre 12». ¿Cuántos kilómetros hay?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - 288 más el número de kilómetros es igual a tres veces el exceso del número de kilómetros sobre 12.
- Incógnitas:
  - Los kilómetros de distancia de Gandía a Benicàssim.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «x» al número de kilómetros que está Gandía de Benicàssim, los datos del enunciado del problema se pueden traducir en la siguiente ecuación lineal de una incógnita $288 + x = 3 \cdot (x - 12)$ que es resoluble, por lo que el problema parece que será resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos la ecuación en la que hemos traducido el enunciado.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

$288 + x = 3 \cdot (x - 12) \rightarrow 288 + x = 3x - 36 \rightarrow 288 + 36 = 3x - x \rightarrow 324 = = 2x \rightarrow x = 324 : 2 \rightarrow x = 162$.

Verificamos que la ecuación «$288 + x = 3 \cdot (x - 12)$» está bien resuelta sustituyendo el valor encontrado:

$$\left\{\begin{array}{l} 288 + x = 288 + 162 = 450 \\ 3 \cdot (x - 12) = 3 \cdot (162 - 12) = 3 \cdot 150 = 450 \end{array}\right\}.$$

Vemos que los dos miembros de la ecuación dan el mismo valor, luego la ecuación está bien resuelta.

Solución: de Gandía a Benicàssim hay 162 km.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Como estamos trabajando con números naturales, 288 + x es mayor que cero, por lo que, x – 12 también será mayor que cero, es decir, el número de kilómetros tiene que ser mayor que 12, y lo es.

Además, la suma 288 + x tiene que ser múltiplo de 3, porque es el triple del exceso, como 288 es múltiplo de 3, el número de kilómetros también tendrá que ser múltiplo de 3, y lo es.

Luego, creemos que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la distancia de Benicàssim a Gandía, 162 km (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos el número que sumamos a la distancia entre Benicàssim y Gandía (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En el FIB se han conocido dos estudiantes del Grado en Matemáticas, ella es de Benicàssim y él de Gandía, pueblos que distan 162 km. Como los dos son matemáticos se les ocurre el siguiente acertijo "si a un número se le suma los 162 km, el resultado es igual a tres veces el exceso de 162 sobre 12 ¿cuál es ese número?"*». Esperamos que la solución sea 288.

Hacemos los cálculos:

Si llamamos «y» al número que sumamos a la distancia entre Benicàssim y Gandía, los nuevos datos se traducen en la ecuación $y + 162 = 3 \cdot (162 - 12)$:

$y + 162 = 3 \cdot (162 - 12) = 3 \cdot (150) = 450 \rightarrow y + 162 = 450 \rightarrow y = 450 - 162 = 288$.

Efectivamente, 288 es la solución del nuevo problema, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - 288 más el número de kilómetros es igual a tres veces el exceso del número de kilómetros sobre 12.
- Incógnitas:
  - Los kilómetros de distancia de Gandía a Benicàssim.

B) ¿El problema es resoluble?

Por el enunciado: «Si a 288 le sumas el número de kilómetros el resultado es igual a tres veces el exceso del número de kilómetros sobre 12», como la suma es «tres veces…», se trata de un múltiplo de 3, y como 288 también es múltiplo de 3, el número que buscamos tendrá que ser múltiplo de 3.

Además, como a 288 le sumamos un cierto número esta suma será mayor que cero y, entonces, el exceso del número sobre 12 debe ser mayor que cero, luego el número debe ser mayor que 12.

Por lo tanto, la distancia entre Benicàssim y Gandía tendrá que ser mayor que 12 y múltiplo de 3. Haremos pruebas con números que cumplan esta condición y que recogemos en una tabla:

Número de kilómetros	288 más el número de km	Tres veces el exceso del número de km sobre 12	¿288 más el número de km es igual a tres veces el exceso del número sobre 12?
90	288 + 90 = 378	3 · (90 – 12) = = 3 · 78 = 234	NO
120	288 + 120 = 408	3 · (120 – 12) = = 3 · 108 = 324	NO
150	288 + 150 = 438	3 · (150 – 12) = = 3 · 138 = 414	NO
180	288 + 180 = 468	3 · (180 – 12) = = 3 · 168 = 504	NO

Observamos que en las pruebas hasta el 150, el valor de la columna «288 más el número…» es mayor que el valor de la columna «tres veces el exceso…» y, que para 180, el valor de la columna «288 más el número…» es menor que el valor de la columna «tres veces el exceso…», por lo que es posible que entre 150 km y 180 km encontremos un número para el que se cumpla la igualdad en el valor de las dos columnas. Por lo tanto, creemos que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Seguiremos haciendo pruebas con cantidades entre 150 y 180 kilómetros que sean múltiplos de 3.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Número de kilómetros	288 más el número de km	Tres veces el exceso del número de km sobre 12	¿288 más el número de km es igual a tres veces el exceso del número sobre 12?
153	288 + 153 = 441	3 · (153 – 12) = = 3 · 141 = 423	NO
156	288 + 156 = 444	3 · (156 – 12) = = 3 · 144 = 432	NO
159	288 + 159 = 447	3 · (159 – 12) = = 3 · 147 = 441	NO
162	288 + 162 = 450	3 · (162 – 12) = = 3 · 150 = 450	SÍ
165	288 + 165 = 453	3 · (165 – 12) = = 3 · 153 = 459	NO
168	288 + 168 = 456	3 · (168 – 12) = = 3 · 156 = 468	NO

Vemos que, tal y como el número de kilómetros es más grande que 162 km, el valor de la columna «288 más el número…» es cada vez más pequeño que el valor de la columna «tres veces el exceso…», por lo que no volverán a coincidir. Luego, 162 es el único número para el que se cumple la igualdad de los valores de estas columnas. Por lo tanto, solución: la distancia entre Gandía y Benicàssim es de 162 km.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

En la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?* haciendo pruebas con cantidades de kilómetros vemos que tenía que ser una distancia entre 150 y 180 km. En la 3.ª fase encontramos que la solución es 162 km, que está entre 150 y 180 km, por lo que creemos que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la distancia de Benicàssim a Gandía, 162 km (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos el número que sumamos a la distancia entre Benicasim y Gandía (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En el FIB se han conocido dos estudiantes del Grado en Matemáticas, ella es de Benicàssim y él de Gandía, pueblos que distan 162 km. Como los dos son matemáticos se les ocurre el siguiente acertijo "si a un número se le suma los 162 km, el resultado es igual a tres veces el exceso de 162 sobre 12 ¿cuál es ese número?"*». Esperamos que la solución sea 288.

Hacemos los cálculos:

El exceso de 162 sobre 12 es $162 - 12 = 150$, luego el triple de este exceso es $3 \cdot 150 = 450$.

Como el número de kilómetros más 162 tiene que ser igual a 450, el número será $450 - 162 = 288$; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

Tema 5. Problemas de divisibilidad en números naturales

5.1. Introducción

El tema 5 de MP1006 Didáctica de las Matemáticas I (UJI, Plan de Estudios 2010) o MP1806 Didáctica de las Matemáticas I (reforma/modificación de 2018) y también el tema 3 de Alcalde, Pérez y Lorenzo (2014) es «Divisibilidad en Números Naturales», nosotros aquí aportamos una serie de problemas para colaborar en la comprensión y aplicar los contenidos allí explicados.

En el apartado 5.2. «Problemas de divisores, trabajamos los problemas de divisores y máximo común divisor, mientras que en 5.3. «Problemas de múltiplos» nos dedicamos a los múltiplos y al mínimo común múltiplo.

5.2. Problemas de divisores

Problema E.1

Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas, todas iguales, y ha comprado un lápiz de 70 céntimos. Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un bolígrafo de 80 céntimos. ¿Cuál puede ser el valor de cada una de estas monedas si siempre ha dado el precio exacto?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas, todas iguales.
  - Ha comprado un lápiz de 70 céntimos.
  - Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un bolígrafo de 80 céntimos.
  - Siempre ha dado el precio exacto.

- Incógnitas:
    - El valor de cada una de estas monedas.

B) ¿El problema es resoluble?

Podrían ser monedas de 1 céntimo, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como las monedas son todas iguales y Rosa siempre ha dado el precio exacto, el valor de las monedas tiene que ser un divisor de 70 céntimos y también de 80 céntimos, por lo que tendremos que:

a) Buscar los divisores de estas dos cantidades.
b) Elegir los divisores comunes.
c) Ver cuáles de ellos tienen monedas de céntimos del sistema monetario (1 céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos, 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $70 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \rightarrow \text{Card}\,[D(70)] = (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$:
$D(70) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$.
$80 = 2^4 \cdot 5^1 \rightarrow \text{Card}\,[D(80)] = (4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$:
$D(80) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$.
b) $D(70) \cap D(80) = \{1, 2, 5, 10\}$.
c) Todos los números de $D(70) \cap D(80)$ tienen la correspondiente moneda en céntimos, por lo que la solución del problema puede ser cualquiera de ellas.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues son monedas de céntimos.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución es correcta, aplicando el método «resolver el problema de otra manera», concretamente, por tanteo.

Las monedas de céntimos de sistema monetario son: 1 céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos, 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos, entonces, veremos con cuáles de ellas puede dar el precio exacto.

Con monedas de 1 céntimo, sin duda.

Como los precios son 70 y 80 céntimos, con monedas de 2 céntimos, 5 céntimos y 10 céntimos, también puede pagar el precio exacto, pues, 70 y 80 son múltiplos de 2, 5 y 10.

Pero con monedas de 20 céntimos no podría pagar el precio exacto de 70 céntimos, y con monedas de 50 céntimos, ninguno de los dos precios.

Por lo tanto, solución: puede pagar el precio exacto con monedas de 1 céntimo, de 2 céntimos, de 5 céntimos y de 10 céntimos.

Que coinciden con las que hemos encontrado en la 3.ª fase, por lo que pensamos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tal vez, la diferencia podría ser que si para los cálculos de los D(70) y D(80), los estudiantes de Grado en Maestro/a aplicarían «el algoritmo de árbol», el alumnado de Primaria calcularía estos divisores por la definición del concepto de divisor (haciendo multiplicaciones o divisiones).

Problema E.2

En dos calles que miden de largo 72 m y 84 m, respectivamente, queremos plantar árboles que estén igualmente espaciados. ¿Cuál es la mayor distancia posible entre dos árboles consecutivos?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Dos calles que miden de largo 72 m y 84 m, respectivamente.
  - Queremos plantar árboles que estén igualmente espaciados.
  - La distancia entre los árboles tiene que ser la mayor posible.
- Incógnitas:
  - Distancia entre dos árboles consecutivos.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, ya que podemos plantar un árbol cada dos metros, dado que las longitudes de las dos calles son números pares.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como los árboles tienen que estar igualmente espaciados, la distancia de separación entre dos árboles consecutivos tiene que ser un divisor común de las longitudes de las dos calles, por lo tanto, un divisor común de 72 y de 84 m.

Pero como también queremos plantarlos a la mayor distancia posible, esta distancia tendrá que ser el divisor común de 72 y de 84 m más grande, es decir, el mcd (72, 84).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calcularemos el mcd (72, 84) por el algoritmo de los factores primos.

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.
mcd (72, 84) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Solución: la distancia entre dos árboles consecutivos tendrá que ser de 12 m.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que 12 es un divisor de 72 y de 84, además de ser mayor que la distancia propuesta en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, podríamos reducir los datos de medida a la mitad, con lo que tenemos el nuevo problema: «*En dos calles que miden de largo 36 m y 42 m, respectivamente, queremos plantar árboles que estén igualmente espaciados. ¿Cuál es la mayor distancia posible entre dos árboles consecutivos?*». Esperamos que la respuesta sea la mitad que en el problema original, es decir, 6 m.

Hacemos los cálculos:

Calcularemos el mcd (36, 42) por el algoritmo de los factores primos.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

mcd (36, 42) $= 2 \cdot 3 = 6$.

Entonces, la distancia entre dos árboles consecutivos tendrá que ser 6 m; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Dos calles que miden de largo 72 m y 84 m, respectivamente.
  - Queremos plantar árboles que estén igualmente espaciados.
  - La distancia entre los árboles tiene que ser la mayor posible.
- Incógnitas:
  - Distancia entre dos árboles consecutivos.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, ya que podemos plantar un árbol cada dos metros, dado que las longitudes de las dos calles son números pares.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como los árboles tienen que estar igualmente espaciados, la distancia de separación entre dos árboles consecutivos tiene que ser un divisor común de las longitudes de las dos calles, por lo tanto, un divisor común de 72 y de 84 m.

Pero como también queremos plantarlos a la mayor distancia posible, esta distancia tendrá que ser el divisor común de 72 y de 84 m más grande, es decir, el mcd (72, 84).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcd (72, 84) por el algoritmo conceptual.

a) Calcular todos los divisores de 72 y 84:

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.
$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$.

b) Calcular los divisores comunes:

$D(72) \cap D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

c) Elegir el mayor divisor común:

máx. [D(72) ∩ D(84)] = 12.
Entonces, mcd (72,84) = 12.
Solución: la distancia entre dos árboles consecutivos tendrá que ser 12 m.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que 12 es un divisor de 72 y de 84, además de ser mayor que la distancia propuesta en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, que viene condicionada por el mcd, elegimos la de calcularlo por otro método, calculamos el mcd (84, 72) por la automatización del concepto, por el algoritmo de los factores primos.

72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3; 84 = 2 · 2 · 3 · 7.
mcd (72,84) = 2 · 2 · 3 = 12.

Que coincide con la obtenida en la 3.ª fase, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema E.3

Calcula la dimensión del azulejo cuadrado más grande que podremos poner en el suelo de una habitación, cuyas dimensiones son 51 dm por 77 dm, sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Una habitación de dimensiones 51 dm por 77 dm.
  - Poner azulejo cuadrado en el suelo de una habitación sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto.

- Incógnitas:
    - La dimensión del azulejo cuadrado más grande que podremos poner.

B) ¿El problema es resoluble?

Es decir, ¿podemos poner azulejos cuadrados en el suelo de esta habitación sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto?
Sí, por ejemplo, azulejos cuadrados de 1 dm por 1 dm.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como el azulejo debe ser cuadrado, no se tiene que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto, la dimensión del lado del azulejo deberá ser un divisor de las dos dimensiones de la habitación, por tanto, un divisor común de 51 dm y 77 dm.
Pero como queremos poner el azulejo más grande posible, la dimensión del lado del azulejo tendrá que ser el divisor común de 51 dm y 77 dm mayor, es decir, el mcd (51, 77).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcd (51, 77) por el algoritmo de los factores primos.

$51 = 3 \cdot 17$; $77 = 7 \cdot 11$.
mcd (51, 77) = 1, dado que, el número 1 es divisor de todos los números.

Entonces, el azulejo tendrá que ser de 1 dm por 1 dm.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues 1 dm es un divisor de 51 dm y de 77 dm.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la dimensión lateral del azulejo cuadrado más grande que podremos poner en el suelo de una habitación, sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto, 1 dm (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos las dimensiones de la habitación (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*La dimensión lateral del*

azulejo cuadrado más grande que podemos poner en el suelo de una habitación, sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto, es de 1 dm. ¿Qué dimensión tiene la habitación?». Esperamos que sea 51 dm por 77 dm.

Hacemos los cálculos necesarios:

La medida 1 dm de lado del azulejo cuadrado más grande que podremos poner en el suelo de la habitación, sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto, es un divisor de las dimensiones de la habitación, por lo que 51 dm y 77 dm, que tienen como mcd 1, son la solución esperada, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Una habitación de dimensiones 51 dm por 77 dm.
  - Poner azulejo cuadrado en el suelo de una habitación sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto.
- Incógnitas:
  - La dimensión del azulejo cuadrado más grande que podremos poner.

B) ¿El problema es resoluble?

Es decir, ¿podemos poner azulejos cuadrados en el suelo de esta habitación sin tener que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto?
Sí, por ejemplo, azulejos cuadrados de 1 dm por 1 dm.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como el azulejo debe ser cuadrado, no se tiene que partir ningún azulejo y que todo el suelo quede cubierto, la dimensión del lado del azulejo deberá ser un divisor de las dos dimensiones de la habitación, por tanto, un divisor común de 51 dm y 77 dm.

Pero como queremos poner el azulejo más grande posible, la dimensión del lado del azulejo tendrá que ser el divisor común de 51 dm y 77 dm mayor, es decir, el mcd (51, 77).

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcd (51, 77) por el algoritmo conceptual:

a) Calcular todos los divisores de 51 y 77:

51 = 3 · 17; 77 = 7 · 11.
D(51) = {1, 3, 17, 51}.
D(77) = {1, 7, 11, 77}.

b) Calcular los divisores comunes:

D(51) ∩ D(77) = {1}.

c) Elegir el mayor divisor común:

máx [D(51) ∩ D(77)] = 1.
Entonces, el azulejo deberá ser de 1 dm por 1 dm.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues 1 dm es un divisor de 51 dm y de 77 dm.

B) Comprobar la solución

Podríamos calcular el mcd (51, 77) por otro procedimiento, por el algoritmo de los factores primos.

51 = 3·17; 77 = 7·11.
mcd (51, 77) = 1, dado que, el número 1 es divisor de todos los números.

Que coincide con la solución obtenida en la 3.ª fase, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema E.4

Un carpintero tiene 3 listones de madera de 60 cm, 84 cm y 132 cm de longitud, respectivamente, y quiere cortarlos en trozos de la misma longitud, la más larga posible y sin dejar perder madera. ¿Cuánto debe medir la longitud de cada uno de los trozos?

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un carpintero tiene 3 listones de madera de 60 cm, 84 cm y 132 cm de longitud, respectivamente.
  - Quiere cortarlos en trozos de la misma longitud, la más larga posible y sin dejar perder madera.
- Incógnitas:
  - La longitud de cada uno de los trozos.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, ya que vemos que las tres longitudes son múltiplos de 2 y de 3, por lo que podríamos cortar trozos de 6 cm de longitud.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como los trozos tienen que ser de la misma longitud y no tiene que sobrar madera, esta longitud tiene que ser un divisor común de las longitudes de los tres listones, por lo tanto, un divisor común de 60 cm, 84 cm y 132 cm.

Pero como también queremos que la longitud sea la más larga posible, esta tendrá que ser el divisor común de 60 cm, 84 cm y 132 cm más grande, es decir, el mcd (60, 84, 132).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calcularemos el mcd (60, 84, 132) por el algoritmo de los factores primos.

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.
mcd $(60, 84, 132) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Por tanto, la longitud de cada uno de los trozos tendrá que ser 12 cm.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que 12 cm es un divisor de 60 cm, de 84 cm y de 132 cm, además de ser mayor que la distancia propuesta en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la longitud de los trozos de madera, 12 cm (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos cuánto miden las longitudes de los listones (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Un carpintero tiene 3 listones de madera de distinta longitud que ha cortado en trozos de la misma longitud, la más larga posible y sin dejar perder madera. Sabemos que la longitud de estos trozos es de 12 cm. ¿Cuál era la longitud de cada uno de los listones?*». Esperamos que la respuesta sea 60 cm, 84 cm y 132 cm de longitud, respectivamente.

Hacemos los cálculos necesarios:

Los 12 cm de longitud de los trozos, medida que al cortar los listones es la más larga posible y sin que haya sobrado madera, es un divisor común de las medidas de los tres listones que ha cortado, por lo que son múltiplos de 12 cm.

Entonces, calcularemos los múltiplos de 12 distintos de cero.

$M^*(12)$: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144…

Vemos que entre los números aparecen 60, 84 y 132, que tienen como mcd 12; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un carpintero tiene tres listones de madera de 60 cm, 84 cm y 132 cm de longitud, respectivamente.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Quiere cortarlos en trozos de la misma longitud, la más larga posible y sin dejar de perder madera.

• Incógnitas:

- La longitud de cada uno de los trozos.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, ya que vemos que las tres longitudes son múltiplos de 2, por lo que podríamos cortar trozos de 2 cm de longitud.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como los trozos tienen que ser de la misma longitud y no tiene que sobrar madera, esta longitud tiene que ser un divisor común de las longitudes de los tres listones, por lo tanto, un divisor común de 60 cm, 84 cm y 132 cm.

Pero, como también queremos que la longitud sea la más larga posible, esta tendrá que ser el divisor común de 60 cm, 84 cm y 132 cm más grande, es decir, el mcd (60, 84, 132).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calcularemos el mcd (60, 84, 132) por el algoritmo conceptual.

a) Calculamos todos los divisores de 60, 84 y 132:

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.
D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
D(84) = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84}.
D(132) = {1, 2, 3, 4, 6, 12, 11, 22, 33, 44, 66, 132}.

b) Calculamos los divisores comunes:

D(60) ∩ D(84)) ∩ D(132) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

c) Elegir el mayor divisor común:

máx. [D(60) ∩ D(84)) ∩ D(132)] = 12.
Entonces, mcd (60, 84, 132) = 12.

Solución: la longitud de cada uno de los trozos tendrá que ser 12 cm.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que 12 cm es un divisor de 60 cm, de 84 cm y de 132 cm, además de ser mayor que la longitud propuesta en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, que viene condicionada por el mcd, elegimos la de calcularlo por otro método, calculamos el mcd (60, 84, 132) por la automatización del concepto, por el algoritmo de los factores primos.

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.
mcd (60, 84, 132) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ cm.

Por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema E.5

Se quiere embaldosar todo el suelo de una habitación rectangular que tiene 50 dm de largo y 45 dm de ancho, con baldosas cuadradas. Calcula las dimensiones de la baldosa y la cantidad de ellas, tal que el número de baldosas que se pongan sea el mínimo y que no haga falta cortar ninguna de ellas.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Habitación de 50 dm por 45 dm.
  - Poner baldosas cuadradas en el suelo de una habitación sin tener que cortar ninguna baldosa y que todo el suelo quede cubierto.
  - La cantidad de baldosas debe ser la mínima posible.

- Incógnitas:
  - Las dimensiones de la baldosa cuadrada.
  - La cantidad de ellas a poner.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

B) ¿El problema es resoluble?

Si ponemos baldosas de 1 dm por 1 dm cubriremos todo el suelo de la habitación sin cortar ninguna, y pondríamos 50 · 45 = 2.250 baldosas, entonces, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como la baldosa debe ser cuadrada, no se debe cortar ninguna de ellas y todo el suelo debe quedar cubierto, la dimensión del lado de la baldosa deberá ser un divisor de las dos dimensiones de la habitación, por lo tanto, un divisor común de 50 dm y 45 dm.
Pero, como queremos poner el mínimo número de baldosas, necesitamos que la baldosa sea la más grande posible, es decir, la dimensión del lado de la baldosa deberá ser lo más grande posible, por lo tanto, buscamos el divisor común de 50 dm y 45 dm más grande, es decir, el mcd (50, 45).

b) Finalmente, obtendremos el número de baldosas que pondremos a lo largo de la habitación dividiendo 50 por el mcd (50, 45) y el número de baldosas que pondremos a lo ancho dividiendo 45 por el mcd (50, 45). Como la habitación es un rectángulo multiplicaremos los dos números para conocer la cantidad mínima de baldosas necesarias.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calculamos el mcd (50, 45) por la automatización del concepto, por el algoritmo de los factores primos.

50 = 2 · 5 · 5, 45 = 3 · 3 · 5.
mcd (50, 45) = 5.
La baldosa deberá ser de 5 dm por 5 dm.

b) Para calcular el menor número posible de baldosas:

50 : 5 = 10 baldosas que pondremos a lo largo de la habitación.
45 : 5 = 9 baldosas que pondremos al ancho.

Cantidad mínima de baldosas necesarias 10 · 9 = 90 baldosas.

Solución: la baldosa deberá ser de 5 dm por 5 dm y, necesitaremos 90 baldosas.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El resultado, baldosas de 5 dm por 5 dm, parece razonable pues 5 es divisor de 50 y 45 y, además, ha hecho que el número de baldosas fuera menor que el de

la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*, que nos daba 50 · 45 = = 2.250 baldosas de 1 dm por 1 dm.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la dimensión lateral de la baldosa cuadrada más grande que podremos poner en el suelo de una habitación, sin tener que partir ninguna baldosa y que todo el suelo quede cubierto, 5 dm, y el número de baldosas que ponemos, 90 (eran incógnitas y pasan a ser datos en el nuevo problema), y calcularemos las dimensiones de la habitación (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*La dimensión lateral de la baldosa cuadrada más grande que podremos poner en el suelo de una habitación, sin tener que partir ninguna baldosa y que todo el suelo quede cubierto, es 5 dm, y ponemos 90 baldosas. ¿Qué dimensiones tiene la habitación?*». Esperamos que sea 50 dm por 45 dm.

Hacemos los cálculos necesarios:

Si ponemos 90 baldosas de dimensiones 5 dm por 5 dm, cada una de ellas tiene una superficie de 5 · 5 = 25 dm^2, entonces, la habitación tiene una superficie de 90 · 25 = 2.250 dm^2.

Los 5 dm de dimensión lateral de la baldosa cuadrada más grande que podremos poner en el suelo de una habitación, sin tener que partir ninguna baldosa y que todo el suelo quede cubierto, es un divisor de las dimensiones de la habitación, por lo que las dimensiones de la habitación son un múltiplo de 5.

Entonces, calcularemos los múltiplos de 5 distintos de cero.

M*(5): 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55…

Vemos que entre los múltiplos aparecen 45 y 50, que tienen como mcd 5, y además, 45 · 50 = 2.250 dm^2; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Habitación de 50 dm por 45 dm.

- Poner baldosas cuadradas en el suelo de una habitación sin tener que cortar ninguna baldosa y que todo el suelo quede cubierto.
- La cantidad de baldosas debe ser la mínima posible.

• Incógnitas:

- Las dimensiones de la baldosa cuadrada.
- La cantidad de ellas a poner.

B) ¿El problema es resoluble?

Si ponemos baldosas de 1 dm por 1 dm cubriremos todo el suelo de la habitación sin cortar ninguna, y pondríamos 50 · 45 = 2.250 baldosas, entonces, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como la baldosa debe ser cuadrada, no se debe cortar ninguna de ellas y todo el suelo debe quedar cubierto, la dimensión del lado del azulejo deberá ser un divisor de las dos dimensiones de la habitación, por lo tanto, un divisor común de 50 dm y 45 dm.
Pero como queremos poner el mínimo número de baldosas, necesitamos que la baldosa sea la mayor posible, es decir, la dimensión del lado de la baldosa deberá ser lo más grande posible, por lo tanto, buscamos el divisor común de 50 dm y 45 dm más grande, es decir, el mcd (50, 45).

b) Finalmente, obtendremos el número de baldosas que pondremos a lo largo de la habitación dividiendo 50 por el mcd (50, 45) y el número de baldosas que pondremos al ancho dividiendo 45 por el mcd (50, 45). Como la habitación es un rectángulo multiplicaremos los dos números para conocer la cantidad mínima de baldosas necesarias.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calculamos el mcd (50, 45) por el algoritmo conceptual.

a.1) Calcular todos los divisores de 50 y de 45:

$D(50) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$.
$D(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$.

a.2) Calcular los divisores comunes de 50 y de 45:

$D(50) \cap D(45) = \{1, 5\}$.

a.3) Elegir el mayor divisor común de 50 y de 45:

$\text{máx } [D(50) \cap D(45)] = 5$.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Entonces, mcd (50, 45) = 5.

Por lo tanto, la baldosa deberá ser de 5 dm por 5 dm.

b) Para calcular el menor número posible de baldosas:

50 : 5 = 10 baldosas que pondremos a lo largo de la habitación.
45 : 5 = 9 baldosas que pondremos al ancho.
Cantidad mínima de baldosas necesarias 10 · 9 = 90 baldosas.

Solución: la baldosa deberá ser de 5 dm por 5 dm, y necesitaremos 90 baldosas.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El resultado, baldosas de 5 dm por 5 dm, parece razonable, pues 5 es divisor de 50 y 45 y, además, ha hecho que el número de baldosas fuera menor que el de la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, que viene condicionada por el mcd (50, 45), elegimos la de calcularlo por otro método, y la cantidad de baldosas también la calculamos de otra forma.

Calculamos el mcd (50, 45) por la automatización del concepto, el algoritmo de los factores primos.

50 = 2 · 5 · 5, 45 = 3 · 3 · 5.
mcd (50, 45) = 5.

Que coincide con el obtenido en la 3.ª fase.
Para calcular la cantidad de baldosas, calculamos la superficie de la habitación y la superficie del azulejo.

Superficie de la habitación: 50 dm · 45 dm = 2.250 dm^2.
Superficie de la baldosa: 5 dm · 5 dm = 25 dm^2.
Número de baldosas necesarias, 2.250 : 25 = 90, entonces, la cantidad de baldosas coincide con la obtenida en la 3.ª fase.

Creemos, pues, que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Problema E.6

Hemos comprado la misma pesada de nísperos que de albaricoques, habiendo 84 nísperos y 66 albaricoques. Si queremos hacer el menor número de bolsitas para regalar a los niños y a las niñas, pero que tengan la misma cantidad de frutas, sin mezclarlas y sin que queden frutas por repartir ¿cuántas bolsitas podremos hacer?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Hemos comprado 84 nísperos y 66 albaricoques.
  - Queremos hacer el menor número de bolsitas para regalar a los niños y a las niñas.
  - Que tengan la misma cantidad de frutas, sin mezclarlas y sin que queden frutas por repartir.
- Incógnitas:
  - Número de bolsas que podremos hacer.

B) ¿El problema es resoluble?

Si ponemos dos frutas en cada bolsita, sin mezclarlas, no quedan frutas por repartir, luego la acción es posible y haríamos 42 + 33 = 75 bolsitas, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como queremos repartir las frutas en bolsitas que tengan la misma cantidad, sin mezclarlas y sin que sobre ninguna, el número de frutas de cada bolsa tiene que ser un divisor común de la cantidad de ambos tipos de frutas, por lo tanto, un divisor común de 84 y de 66 frutas.
Pero como también queremos hacer el menor número de bolsitas para regalar a los niños y a las niñas, esta cantidad tendrá que ser el divisor común más grande de 84 y de 66 frutas, es decir, el mcd (84, 66).

b) Dividiremos la cantidad de frutas de cada tipo entre el mcd obtenido y, así, obtendremos cuántas bolsas haremos con cada tipo de fruta.
c) Sumaremos el número de bolsas de cada tipo de frutas para obtener la cantidad total de bolsas que haremos.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calcularemos el mcd (84, 66) por el algoritmo de los factores primos.

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.
mcd (84, 66) = $2 \cdot 3 = 6$.
Entonces, el número de frutas en cada bolsa tiene que ser 6.

b) 84 : 6 = 14 bolsas de nísperos, 66 : 6 = 11 bolsas de albaricoques.

c) 14 + 11 = 25.

Solución: haremos 25 bolsitas para regalar a los niños y a las niñas.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El resultado, 25 bolsitas, parece razonable, pues 6 es divisor de 84 y 66 y, además, ha hecho que el número de bolsitas fuera menor que el de la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, podríamos reducir los datos de cantidad de frutas de cada tipo a la mitad, 42 nísperos y 33 albaricoques, con lo que tenemos el nuevo problema: «*Hemos comprado la misma pesada de nísperos que de albaricoques, habiendo 42 nísperos y 33 albaricoques. Si queremos hacer el menor número de bolsitas para regalar a los niños y a las niñas, pero que tengan la misma cantidad de frutas, sin mezclarlas y sin que queden frutas por repartir ¿cuántas bolsitas podremos hacer?*».

Hemos visto en la 2.ª y 3.ª fases que la respuesta a la pregunta que formula el problema viene afectada por el mcd del número de frutas, y sabemos que el mcd (42, 33) será la mitad del mcd (84, 66).

Como la respuesta a la pregunta se obtiene mediante una suma, donde los sumandos se calculan dividiendo la cantidad de frutas de cada tipo (42 nísperos y 33 albaricoques) entre la cantidad de frutas que pondremos en cada bolsita, el mcd (42, 33), y vemos que en estas divisiones se ha reducido a la mitad tanto el dividendo como el divisor, luego el cociente de estas divisiones será el mismo

que en el problema original y, por lo tanto, la suma de ambas cantidades también, por lo que esperamos que la respuesta del nuevo problema sea la misma que la del problema original, 25 bolsitas.

Hacemos los cálculos.

a) Calcularemos el mcd (42, 33) por el algoritmo de los factores primos.

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $33 = 3 \cdot 11$.
mcd (42, 33) = 3.

Entonces, el número de frutas en cada bolsa tiene que ser 3.

b) 42 : 3 = 14 bolsas de nísperos, 33 : 3 = 11 bolsas de albaricoques.

c) 14 + 11 = 25.

Como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Hemos comprado 84 nísperos y 66 albaricoques.
  - Queremos hacer el menor número de bolsitas para regalar a los niños y a las niñas.
  - Que tengan la misma cantidad de frutas, sin mezclarlas y sin que queden frutas por repartir.

- Incógnitas:
  - Número de bolsas que podremos hacer.

B) ¿El problema es resoluble?

Si ponemos dos frutas en cada bolsita, sin mezclarlas, no quedan frutas por repartir, luego la acción es posible y haríamos 42 + 33 = 75 bolsitas, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como queremos repartir las frutas en bolsitas que tengan la misma cantidad, sin mezclarlas y sin que sobre ninguna, el número de frutas de cada bolsa tiene que ser un divisor común de la cantidad de ambos tipos de frutas, por lo tanto, un divisor común de 84 y de 66 frutas.
Pero, como también queremos hacer el menor número de bolsitas para regalar a los niños y a las niñas, esta cantidad tendrá que ser el divisor común más grande de 84 y de 66 frutas, es decir, el mcd (84, 66).
b) Dividiremos la cantidad de frutas de cada tipo entre el mcd obtenido y así obtendremos cuántas bolsas haremos con cada tipo de fruta.
c) Sumaremos el número de bolsas de cada tipo de frutas para obtener la cantidad total de bolsas que haremos.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calculamos el mcd (84, 66) por el algoritmo conceptual.

a.1) Calcular todos los divisores de 84 y 66:

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.
$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$.
$D(66) = \{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66\}$.

a.2) Calcular los divisores comunes:

$D(84) \cap D(66) = \{1, 2, 3, 6\}$.

a.3) Elegir el mayor divisor común:

máx. $[D(84) \cap D(66)] = 6$.

Entonces, mcd (84, 66) = 6.
Luego hay que poner 6 frutas en cada bolsita.

b) 84 : 6 = 14, 66 : 6 = 11.

c) 14 + 11 = 25 bolsitas.

Solución: haremos 25 bolsitas para regalar a los niños y a las niñas.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El resultado, 25 bolsitas, parece razonable, pues 6 es divisor de 84 y 66 y, además, ha hecho que el número de bolsitas fuera menor que el de la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Hemos visto en la 2.ª y 3.ª fases que la respuesta a la pregunta que formula el problema viene condicionada por el mcd del número de frutas, entonces, de las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, elegimos la de calcularlo por otro método.

Calculamos el mcd (84, 66) por la automatización del concepto, por el algoritmo de los factores primos.

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.
mcd $(84, 66) = 2 \cdot 3 = 6$.

Creemos que el mcd (84, 66) está bien calculado y, por lo tanto, la solución de 25 bolsitas es correcta.

Problema E.7

El dependiente de una papelería debe organizar en botes 36 bolígrafos rojos, 60 bolígrafos azules y 48 bolígrafos negros de manera que todos los botes tengan el mismo número de bolígrafos, sin mezclar los colores y sin que queden bolígrafos por organizar. ¿Cuántos botes necesitará si quiere utilizar el menor número de botes posible?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Organizar en botes 36 bolígrafos rojos, 60 bolígrafos azules y 48 bolígrafos negros.
  - Que todos los botes tengan el mismo número de bolígrafos, sin mezclar los colores y sin que queden bolígrafos por organizar.
  - Queremos utilizar el menor número posible de botes.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- Incógnitas:
  - Número de botes que utilizará.

B) ¿El problema es resoluble?

Como la cantidad de bolígrafos de cada color es par, si, por ejemplo, ponemos dos bolígrafos del mismo color en cada bote, todos los botes tendrán el mismo número de bolígrafos, sin mezclar los colores y sin que queden bolígrafos para organizar.

Por lo cual el trabajo de organizar los bolígrafos con las condiciones del enunciado es posible, y en este caso utilizaría 18 + 30 + 24 = 72 botes.

Entonces, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Para responder a la pregunta, es decir, encontrar el resultado «mínimo número de botes», como la cantidad de botes depende del número de bolígrafos que ponemos en cada bote, calcularemos primero cuántos bolígrafos pondremos en cada bote.
Todos los botes deben tener el mismo número de bolígrafos, sin mezclar los colores y no pueden quedar bolígrafos por organizar, por lo que el número de bolígrafos de cada bote debe ser un divisor del número de bolígrafos de cada color, por tanto, un divisor común de 36, 60 y 48.
Se quiere utilizar el menor número posible de botes para organizar los bolígrafos, entonces, el número de bolígrafos que hay que poner en cada bote tendrá que ser el mayor posible.
Por lo tanto, hay que buscar el divisor común de 36, 60 y 48, más grande posible, es decir, debemos calcular el mcd (36, 60, 48).

b) A continuación, obtendremos el menor número de botes de bolígrafos que hay que utilizar dividiendo el número total de bolígrafos por el mcd (36, 60, 48) obtenido.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calculamos el mcd (36, 60, 48) por la automatización del concepto, por el algoritmo de los factores primos.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.
mcd (36, 60, 48) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.
Los botes deberán tener 12 bolígrafos.

b) Número total de bolígrafos a organizar: 36 + 60 + 48 = 144 bolígrafos.

Número de botes necesarios: 144 : 12 = 12.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El resultado, 12 botes de 12 bolígrafos, parece razonable porque el número de bolígrafos, 12, es divisor de 36, 60 y 48 y, además, ha hecho que el número de botes utilizados, 12, fuera menor que el de la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?,* 72 botes.

B) Comprobar la solución

Nos aseguramos de que la solución es correcta aplicando el método «resolver el problema de otra manera», concretamente, por tanteo.

Si ponemos todos los bolígrafos de un mismo color en un bote, utilizaríamos solo un bote por color, en total tres botes, pero los botes de bolígrafos de los diferentes colores no tendrían la misma cantidad de bolígrafos (36, 60 y 48, respectivamente).

Si pusiéramos la mitad de los bolígrafos de cada color en un bote, utilizaríamos dos botes por color, en total, seis botes, pero los botes de bolígrafos de los diferentes colores no tendrían la misma cantidad de bolígrafos (18, 30 y 24, respectivamente).

En la siguiente tabla recogemos las pruebas anteriores, y otras, poniendo en la columna de la izquierda el número de bolígrafos de cada color, en la cabecera de las otras columnas, el número de botes en los que juntamos los bolígrafos, sin mezclar los colores y sin que queden bolígrafos por organizar, y en el resto de las casillas el número de bolígrafos en cada bote:

		NÚMERO DE BOTES				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
NÚMERO DE BOLÍGRAFOS	*36*	36	18	12	9	
	60	60	30	20	15	12
	48	48	24	16	12	

Vemos en la tabla que, para poner la misma cantidad de bolígrafos, del mismo color y sin que queden bolígrafos por organizar, esta cantidad tendría que ser 12 bolígrafos, con lo que utilizaríamos 3 botes para los bolígrafos rojos, 5 botes para los bolígrafos azules y 4 botes para los bolígrafos negros, en total 12 botes.

El resultado ha sido el mismo que en la 3.ª fase; por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - o Organizar en botes 36 bolígrafos rojos, 60 bolígrafos azules y 48 bolígrafos negros.
  - o Que todos los botes tengan el mismo número de bolígrafos, sin mezclar los colores y sin que queden bolígrafos por organizar.
  - o Queremos utilizar el menor número posible de botes.
- Incógnitas:
  - o Número de botes que utilizará.

B) ¿El problema es resoluble?

Como la cantidad de bolígrafos de cada color es par, si, por ejemplo, ponemos dos bolígrafos del mismo color en cada bote, todos los botes tendrán el mismo número de bolígrafos, sin mezclar los colores y sin que queden bolígrafos para organizar.

Por lo cual el trabajo de organizar los bolígrafos con las condiciones del enunciado es posible, y en este caso utilizaría 18 + 30 + 24 = 72 botes.

Entonces, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Para responder a la pregunta, es decir, encontrar el resultado «mínimo número de botes», como la cantidad de botes depende del número de bolígrafos que ponemos en cada bote, calcularemos primero cuántos bolígrafos pondremos en cada bote.
Todos los botes deben tener el mismo número de bolígrafos, sin mezclar los colores y no pueden quedar bolígrafos por organizar, por lo que el número de bolígrafos de cada bote debe ser un divisor del número de bolígrafos de cada color, por tanto, un divisor común de 36, 60 y 48.
Se quiere utilizar el menor número posible de botes para organizar los bolígrafos, entonces, el número de bolígrafos que hay que poner en cada bote tendrá que ser el mayor posible.
Por lo tanto, hay que buscar el divisor común de 36, 60 y 48, más grande posible, es decir, debemos calcular el mcd (36, 60, 48).

b) A continuación, obtendremos el número de botes de bolígrafos de cada color, dividiendo el número de bolígrafos de cada color por el mcd (36, 60, 48) obtenido.

c) Por último, para calcular el menor número de botes por utilizar, es decir, el resultado, sumaremos el número de botes para cada color.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calculamos el mcd (36, 60, 48) por el algoritmo conceptual.

a.1) Calcular todos los divisores de 36, 60 y 48:

D(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}.
D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}.

a.2) Calcular los divisores comunes:

D(36) ∩ D(60) ∩ D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

a.3) Elegir el mayor divisor común:

máx [D(36) ∩ D(60) ∩ D(48)] = 12.

Entonces, mcd (36, 60, 48) = 12.
Los botes deberán tener 12 bolígrafos.

b) Número de botes de cada color.

De bolígrafos rojos, 36 : 12 = 3.
De bolígrafos azules, 60 : 12 = 5.
De bolígrafos negros, 48 : 12 = 4.

c) Resultado, menor número posible de botes: 3 + 5 + 4 = 12 botes.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El resultado, 12 botes de 12 bolígrafos, parece razonable porque el número de bolígrafos, 12, es divisor de 36, 60 y 48 y, además, ha hecho que el número de botes utilizados, 12, fuera menor que el de la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?,* 72 botes.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicando el método «resolver el problema de otra manera», concretamente, por tanteo.

Si ponemos todos los bolígrafos de un mismo color en un bote, utilizaríamos solo un bote por color, en total tres botes, pero los botes de bolígrafos de los diferentes colores no tendrían la misma cantidad de bolígrafos (36, 60 y 48, respectivamente).

Si pusiéramos la mitad de los bolígrafos de cada color en un bote, utilizaríamos dos botes por color, en total, seis botes, pero los botes de bolígrafos de los diferentes colores no tendrían la misma cantidad de bolígrafos (18, 30 y 24, respectivamente).

En la siguiente tabla recogemos las pruebas anteriores, y otras, poniendo en la columna de la izquierda el número de bolígrafos de cada color, en la cabecera de las otras columnas, el número de botes en los que juntamos los bolígrafos, sin mezclar los colores y sin que queden bolígrafos por organizar, y en el resto de las casillas el número de bolígrafos en cada bote:

		NÚMERO DE BOTES				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
NÚMERO DE BOLÍGRAFOS	*36*	36	18	12	9	
	60	60	30	20	15	12
	48	48	24	16	12	

Vemos en la tabla que, para poner la misma cantidad de bolígrafos, del mismo color y sin que queden bolígrafos por organizar, esta cantidad tendría que ser 12 bolígrafos, con lo utilizaríamos 3 botes para los bolígrafos rojos, 5 botes para los bolígrafos azules y 4 botes para los bolígrafos negros, en total 12 botes.

El resultado ha sido el mismo que en la 3.ª fase; por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema E.8

Se quiere alambrar un terreno que tiene forma de cuadrilátero irregular cuyos lados miden 320 m, 208 m, 396 m y 168 m, respectivamente. Para sujetar la alambrada se quieren poner postes equidistantes y que en cada vértice del cuadrilátero haya un poste. ¿Cuál es la mayor distancia a la que pueden colocarse los postes y cuántos postes se utilizarán?

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un cuadrilátero irregular cuyos lados miden 320 m, 208 m, 396 m y 168 m, respectivamente.
  - Para sujetar la alambrada se quieren poner postes equidistantes y que en cada vértice del cuadrilátero haya un poste.
- Incógnitas:
  - La mayor distancia a la que pueden colocarse los postes.
  - El número de postes que se utilizarán.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, ya que podemos poner un poste cada dos metros, dado que las longitudes de los cuatro lados del cuadrilátero son números pares y, utilizaríamos 160 + 104 + + 198 + 84 = 546 postes.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como los postes tienen que ponerse equidistantes, la distancia de separación entre dos postes consecutivos tiene que ser un divisor común de las longitudes de los lados del cuadrilátero, por lo tanto, un divisor común de 320 m, 208 m, 396 m y 168 m, respectivamente.
Pero, como también queremos ponerlos a la mayor distancia posible, esta distancia tendrá que ser el divisor común de 320 m, 208 m, 396 m y 168 m más grande posible, es decir, el mcd (320, 208, 396, 168).

b) Dividiremos el perímetro del cuadrilátero irregular por el mcd obtenido y, así, obtendremos el número de trozos del contorno, de longitud el mcd, que coincide con el número de postes que tendremos que utilizar para alambrar el terreno.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calcularemos el mcd (320, 208, 396, 168) por el algoritmo de los factores primos.

$320 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $208 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$; $396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$; $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.
mcd (320, 208, 396, 168) = $2 \cdot 2 = 4$.
Por lo tanto, la mayor distancia entre los postes tiene que ser 4 m.

b) 320 + 208 + 396 + 168 = 1.092 m → 1.092 : 4 = 273 postes.

Solución: la mayor distancia entre los postes será 4 m, y utilizaremos 273 postes para poner la alambrada.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El resultado 4 m entre postes, parece razonable, pues 4 es divisor de 320, 208, 396 y 168, y además, mejora la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*, 2 metros entre cada dos postes.

El resultado 273 postes, parece razonable pues mejora la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*, 546 postes.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, podríamos reducir a la mitad los datos de la longitud de los lados del terreno que queremos alambrar, con lo que tenemos el nuevo problema: «*Se quiere alambrar un terreno que tiene forma de cuadrilátero irregular cuyos lados miden 160 m, 104 m, 198 m y 84 m, respectivamente. Para sujetar la alambrada se quieren poner postes equidistantes y que en cada vértice del cuadrilátero haya un poste. ¿Cuál es la mayor distancia a la que pueden colocarse los postes y cuántos postes se utilizarán?*». Esperamos que la respuesta a la primera pregunta sea 2 m, la mitad que en el problema original, y como la respuesta a la segunda pregunta se obtiene mediante una división en la que el dividendo, el perímetro del nuevo cuadrilátero irregular, será la mitad que en el problema original, y el divisor esperamos que sea la mitad que en el problema original, por tanto, el cociente de la división será el mismo que en el problema original, es decir, se utilizarán 273 postes.

Hacemos los cálculos:

a) Calcularemos el mcd (160, 104, 198, 84) por el algoritmo de los factores primos.

$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$; $198 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.
mcd (160, 104, 198, 84) = 2.

Entonces, la mayor distancia entre los postes tiene que ser 2 m.

b) 160 + 104 + 198 + 84 = 546 → 546 : 2 = 273 postes.

Las respuestas, 2 m y 273 postes, coinciden con las esperadas; por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Para la resolución de este problema tenemos que calcular el máximo común divisor de cuatro números, contenido que excede los establecidos en el Decreto 108/2014, por lo que no lo resolvemos como Alumnado de Educación Primaria.

Problema E.9

Se disponen de tres extensiones de terreno de 3.675 m², 1.575 m² y 2.275 m² de superficie, y se quieren dividir en parcelas de la misma superficie. ¿Cuál debe ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas que se obtengan sea el menor posible?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Las medidas de las superficies de las tres extensiones de terreno, 3.675 m², 1.575 m² y 2.275 m².
  - Se quieren dividir en parcelas de la misma superficie.
- Incógnitas:
  - La superficie de cada parcela para que el número de parcelas que se obtenga sea el menor posible.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, porque al menos se podrían hacer parcelas de 5 m² de superficie, ya que los tres números son múltiplos de 5.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Queremos dividir las tres extensiones de terreno en parcelas más pequeñas de la misma cantidad de superficie, por lo que la extensión de las parcelas deberá ser un divisor de la medida de las superficies de las tres extensiones, y como todas

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

las parcelas que obtengamos serán de igual medida de superficie, esta deberá ser un divisor de 3.675 m^2, 1.575 m^2 y 2.275 m^2, es decir, un divisor común.

Para que el número de parcelas que obtengamos sea el menor posible, su superficie deberá ser lo más grande posible, entonces, tendremos que calcular el mcd de las medidas de las tres extensiones de terreno.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcd (3.675, 1.575, 2.275) por la automatización del concepto, el algoritmo de los factores primos.

3.675 = 3 · 5 · 5 · 7 · 7; 1.575 = 3 · 3 · 5 · 5 · 7, y 2.275 = 5 · 5 · 7 · 13.
mcd (3.675, 1.575, 2.275) = 5 · 5 · 7 = 175.

Por lo tanto, la superficie de cada parcela será de 175 m^2.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Parece que sí, pues 175 m^2 es un divisor de las medidas de las tres extensiones de terreno y, además, ha mejorado la propuesta de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, dividiendo por 5 los datos, por lo que consideramos el nuevo problema: «*Se disponen de tres extensiones de terreno de 735 m^2, 315 m^2 y 455 m^2 de superficie y se quieren dividir en parcelas de la misma superficie. ¿Cuál debe ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas que se obtengan sea el menor posible?*». Esperamos que las nuevas parcelas tengan una extensión de 175 : 5 = 35 m^2.

Hacemos los cálculos.

Descomponemos en factores primos los números:

735 = 3 · 5 · 7 · 7; 315 = 3 · 3 · 5 · 7; 455 = 5 · 7 · 13.

mcd (735, 315, 455) = 5 · 7 = 35.

Por lo tanto, la superficie de cada parcela sería de 35 m^2.

Como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Para la resolución de este problema tenemos que calcular el máximo común divisor de tres números y, además, de cuatro cifras cada uno, contenido que excede los establecidos en el Decreto 108/2014, por lo que no lo resolvemos como alumnado de Educación Primaria.

5.3. Problemas de múltiplos

Problema F.1

Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m. ¿Cuál es su longitud exacta, sabiendo que se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desperdiciar nada?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m.
  - Se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desperdiciar nada.
- Incógnitas:
  - La longitud exacta del cable.

B) ¿El problema es resoluble?

Si se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desperdiciar nada, quiere decir que su longitud es múltiplo de 15 m y de 18 m.

Como mide más de 150 m y menos de 200 m, su longitud tendría que ser un múltiplo común de 15 m y de 18 m comprendido entre 150 m y 200 m.

Tenemos que 180 m está entre 150 m y 200 m, es múltiplo de 18 m y también de 15 m ([15 m] · 12), es decir, hay una longitud que cumple los datos del problema, por tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Calcularemos todos los múltiplos de 15 m entre 150 m y 200 m.
b) Calcularemos todos los múltiplos de 18 m entre 150 m y 200 m.
c) Veremos cuáles son las longitudes comunes de los dos conjuntos anteriores y esas serán las soluciones del problema.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $\{x \in M(15) \,/\, 150 < x < 200\} = \{165, 180, 195\}$.
b) $\{x \in M(18) \,/\, 150 < x < 200\} = \{162, 180, 198\}$.
c) $\{x \in M(15) \,/\, 150 < x < 200\} \cap \{x \in M(18) \,/\, 150 < x < 200\} = \{180\}$.

Entonces, la única solución del problema es 180 m.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es una longitud que satisface los datos del problema.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la longitud exacta del cable, 180 m (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos en trozos de qué longitudes se puede dividir (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Un rollo de cable mide 180 m. Sabiendo que también se puede dividir, además de en 18 m, en trozos de una longitud entre 14 m y 20 m sin desperdiciar nada, ¿cuál es la longitud exacta de esos otros trozos?*». Esperamos que la respuesta sea 15 m.

Hacemos los cálculos necesarios:

Tendremos que calcular los divisores de 180 m y ver si hay alguno diferente de 18 m que está entre 14 m y 20 m.

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \rightarrow \text{Card}\,[D(180)] = (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$

$D(180) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}.$

Encontramos que entre 14 m y 20 m, además de 18 m, tenemos 15 m; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m.
  - Se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desperdiciar nada.
- Incógnitas:
  - Longitud exacta del cable.

B) ¿El problema es resoluble?

Si se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desaprovechar nada, quiere decir que su longitud es múltiplo de 15 m y de 18 m.

Como mide más de 150 m y menos de 200 m, tendrá que medir un múltiplo común de 15 m y de 18 m comprendido entre 150 m y 200 m.

Tenemos que 180 m está entre 150 m y 200 m, es múltiplo de 18 m y también de 15 m ([15 m] · 12), es decir, hay una longitud que cumple los datos del problema, por tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Calcularemos todos los múltiplos de 15 m entre 150 m y 200 m.
b) Calcularemos todos los múltiplos de 18 m entre 150 m y 200 m.
c) Veremos cuáles son las longitudes comunes de los dos conjuntos anteriores y esas serán las soluciones del problema.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Múltiplos de 15 m entre 150 m y 200 m = {165, 180, 195}.
b) Múltiplos de 18 m entre 150 m y 200 m = {162, 180, 198}.
c) Múltiplos de 15 m y de 18 m entre 150 m y 200 m = {180}.

Entonces, la única solución del problema es 180 m.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es una longitud que satisface los datos del problema.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», por lo que enunciamos un nuevo problema duplicando los datos: «*Un rollo de cable mide más de 300 m y menos de 400 m. ¿Cuál es la longitud exacta, sabiendo que se puede dividir en trozos de 30 m y también en trozos de 36 m sin desperdiciar nada?*». Esperamos que la solución sea 360 m.

Hacemos los cálculos:

Tendremos que calcular todos los múltiplos de 30 m y de 36 m entre 300 m y 400 m y, finalmente, veremos cuáles son las longitudes comunes de los dos conjuntos.

a) Múltiplos de 30 m entre 300 m y 400 m = {330, 360, 390}.

b) Múltiplos de 36 m entre 300 m y 400 m = {324, 360, 396}.

c) Múltiplos de 30 m y de 36 m entre 300 m y 400 m = {360}.

Encontramos que la longitud exacta del cable es de 360 m; como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema F.2

Un coche necesita que le cambien el aceite cada 9.000 km y el filtro del aire cada 15.000 km. ¿En qué número mínimo de kilómetros se le tendrá que hacer los dos cambios a la vez?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
    - Un coche necesita que le cambien el aceite cada 9.000 km.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

    - Y necesita que le cambien el filtro del aire cada 15.000 km.
- Incógnitas:
    - Número mínimo de kilómetros en el que se le tendrán que hacer los dos cambios a la vez.

B) ¿El problema es resoluble?

Vamos a ver cada cuántos kilómetros cambiamos el aceite: 9.000, 18.000, 27.000, 36.000, 45.000, 54.000, 63.000, 72.000, 81.000, 90.000…

Vamos a ver cada cuántos kilómetros cambiamos el filtro del aire: 15.000, 30.000, 45.000, 60.000, 75.000, 90.000…

Vemos que a los 45.000 km se harán los dos cambios, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Coincidirán los dos cambios cuando el coche haya hecho una cantidad de kilómetros que sea múltiplo de 9.000 y de 15.000 km a la vez, es decir, cuando haya hecho una cantidad de kilómetros que sea múltiplo común de 9.000 y 15.000 km.

Queremos calcular el número mínimo de kilómetros en el que se le tendrá que hacer los dos cambios a la vez, por lo tanto, necesitaremos calcular el múltiplo común mínimo de 9.000 y 15.000 km, distinto de cero. Es decir, calcularemos el mcm (9.000, 15.000).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calcularemos el mcm (9.000, 15.000) por el algoritmo de los factores primos.

$9.000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; $15.000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

mcm $(9.000, 15.000) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 45.000$.

Solución: el número mínimo de kilómetros en el que habrá que hacer al coche los dos cambios a la vez será 45.000 km.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es una cantidad de kilómetros distinta de cero y múltiplo de 9.000, y 15.000 km.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos cuándo le cambian el

aceite y el filtro del aire a la vez, a los 45.000 km (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos cada cuántos kilómetros se le cambia el aceite y cada cuántos kilómetros se le cambia el filtro del aire (eran datos y ahora pasan a ser las incógnitas), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Un coche necesita que le cambien el aceite y el filtro del aire cada cierto número de kilómetros. El número mínimo de kilómetros en el que habrá que hacer los dos cambios a la vez es 45.000 km ¿Cada cuántos kilómetros se le cambian cada uno de estos elementos: aceite y filtro del aire?*». Esperamos que la respuesta sea cada 9.000 y 15.000 km, respectivamente.

Hacemos los cálculos necesarios:

Si los cambios de estos elementos se realizan los dos juntos al número mínimo de 45.000 km, esta cantidad es un múltiplo común del número de kilómetros que tarda en hacerse cada cambio de elemento, por lo que el periodo de cambio de cada elemento es un divisor de 45.000 km.

Entonces, calcularemos los divisores de 45.000.

$45.000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \rightarrow \text{Card}\,[D(45.000)] = (3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (4 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$

D(45.000) = {1, 2, 3, …, 9.000, …, 15.000, 22.500, 45.000}.

Vemos que entre los números que tienen como mcm 45.000 están el 9.000 y el 15.000; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Un coche necesita que le cambien el aceite cada 9.000 km.
  - Y necesita que le cambien el filtro del aire cada 15.000 km.
- Incógnitas:
  - Número mínimo de kilómetros en el que se le tendrán que hacer los dos cambios a la vez.

B) ¿El problema es resoluble?

Vamos a ver cada cuántos kilómetros cambiamos el aceite: 9.000, 18.000, 27.000, 36.000, 45.000, 54.000, 63.000, 72.000, 81.000, 90.000…

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Vamos a ver cada cuántos kilómetros cambiamos el filtro del aire: 15.000, 30.000, 45.000, 60.000, 75.000, 90.000…

Vemos que a los 45.000 km se harán los dos cambios, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Coincidirán los dos cambios cuando el coche haya hecho una cantidad de kilómetros que sea múltiplo de 9.000 y de 15.000 km a la vez, es decir, cuando haya hecho una cantidad de kilómetros que sea múltiplo común de 9.000 y 15.000 km.

Queremos calcular el número mínimo de kilómetros en el que se le tendrá que hacer los dos cambios a la vez, por lo tanto, necesitaremos calcular el múltiplo común mínimo de 9.000 y 15.000 km, distinto de cero. Es decir, calcularemos el mcm (9.000, 15.000).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calcularemos el mcm (9.000, 15.000) por el algoritmo conceptual.

a) Múltiplos de 9.000 y de 15.000, distintos de cero:

M*(9.000): 9.000, 18.000, 27.000, 36.000, 45.000, 54.000, 63.000, 72.000, 81.000, 90.000, 99.000…
M*(15.000): 15.000, 30.000, 45.000, 60.000, 75.000, 90.000, 105.000…

b) Múltiplos comunes de 9.000 y de 15.000, distintos de cero:

M*(9.000) ∩ M*(15.000): 45.000, 90.000…

c) Menor múltiplo común de 9.000 y de 15.000, distinto de cero:

mín. [M*(9.000) ∩ M*(15.000)] = 45.000.

Entonces, mcm (9.000, 15.000) = 45.000.

Solución: el número mínimo de kilómetros en el que habrá que hacer al coche los dos cambios a la vez será 45.000 km.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que es una cantidad de kilómetros distinta de cero y múltiplo de 9.000 y de 15.000 km.

B) Comprobar la solución

Podríamos calcular el mcm (9.000, 15.000) por otro procedimiento, por el algoritmo de los factores primos.

9.000 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5 · 5 · 5; 15.000 = 2 · 2 · 2 · 3 · 5 · 5 · 5 · 5.
mcm (9.000, 15.000) = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5 · 5 · 5 · 5 = 45.000.

Como esta cantidad coincide con la obtenida en la 3.ª fase, pensamos que el problema está bien resuelto.

Problema F.3

Para señalizar el recorrido de una regata se ha colocado una boya cada 15 metros y una baliza cada 42 metros. ¿Cada cuántos metros coincidirán una boya y una baliza?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Se ha colocado una boya cada 15 m y una baliza cada 42 m.
- Incógnitas:
  - Cada cuántos metros coincidirán una boya y una baliza.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, ya que si realizamos el producto de los metros a los que se han colocado las boyas y las balizas, encontraríamos un múltiplo común, 15 · 42 = 630 m, y, por lo tanto, coincidirían.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Las boyas y las balizas coincidirán en puntos en los que la distancia al punto de partida de la regata sea un múltiplo común de los metros a los que se colocan cada una de ellas, por lo tanto, tendremos que calcular los múltiplos comunes de 15 m y de 42 m, distintos de cero.

Como queremos saber cada cuántos metros coincidirán, tendremos que buscar el menor múltiplo común distinto de cero, es decir, el mínimo común múltiplo de 15 m y de 42 m.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcm (15, 42) por la automatización del concepto, el algoritmo de los factores primos.

15 = 3 · 5; 42 = 2 · 3 · 7.
mcm (15, 42) = 2 · 3 · 5 · 7 = 210.

Entonces, cada 210 metros coincidirán una boya y una baliza.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues 210 metros es un múltiplo común de 15 m y de 42 m y, además, mejora la propuesta hecha en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos cada cuánto coinciden una boya y una baliza, cada 210 m (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la distancia a la que se coloca cada boya y cada baliza (eran datos y pasan a ser incógnitas en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*Para señalizar el recorrido de una regata han colocado boyas y balizas, a la misma distancia las boyas y también las balizas, siendo diferentes ambas distancias. Coinciden una boya y una baliza cada 210 metros. ¿Cada cuántos metros está colocada una boya y una baliza?*». Esperamos que sea cada 15 m y 42 m, respectivamente.

Hacemos los cálculos necesarios:

Si una boya y una baliza coinciden cada 210 m, esta cantidad es un múltiplo de la distancia a la que se coloca cada boya y cada baliza, por lo que la distancia entre boyas y la distancia entre balizas es un divisor de 210 m.

Entonces, calcularemos los divisores de 210.

210 = 2 · 3 · 5 · 7.
Card [D(210)] = (1 + 1) · (1 + 1) · (1 + 1) · (1 + 1) = 2 · 2 · 2 · 2 = 16.
D(210) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210}.

Vemos que entre los números que tienen como mcm 210 están el 15 y el 42; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Se ha colocado una boya cada 15 m y una baliza cada 42 m.
- Incógnitas:
  - Cada cuántos metros coincidirán una boya y una baliza.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, ya que si realizamos el producto de los metros a los que se han colocado las boyas y las balizas, encontraríamos un múltiplo común, $15 \cdot 42 = 630$ m, y, por lo tanto, coincidirían.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Las boyas y las balizas coincidirán en puntos en los que la distancia al punto de partida de la regata sea un múltiplo común de los metros a los que se colocan cada una de ellas, por lo tanto, tendremos que calcular los múltiplos comunes de 15 m y de 42 m, distintos de cero.

Como queremos saber cada cuántos metros coincidirán, tendremos que buscar el menor múltiplo común distinto de cero, es decir, el mínimo común múltiplo de 15 m y de 42 m.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcm (15, 42) por el algoritmo conceptual.

a) Múltiplos de 15 y de 42, distintos de cero:

M*(15): 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240, …, 420, …, 630…
M*(42): 42, 84, 126, 168, 210, 252, …, 420, …, 630…

b) Múltiplos comunes de 15 y de 42, distintos de cero:

M*(15) ∩ M*(42): 210, 420, 630…

c) Menor de los múltiplos comunes de 15 y de 42, distintos de cero:

mín. [M*(15) ∩ M*(42)] = 210.

Entonces: mcm (15, 42) = 210.

Solución: cada 210 metros coincidirán una boya y una baliza.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues 210 metros es un múltiplo común de 15 m y de 42 m y, además, mejora la propuesta hecha en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, el mcm (15, 42), elegimos la de calcularlo por otro método.

Calculamos el mcm (15, 42) por la automatización del concepto, el algoritmo de los factores primos.

$15 = 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.
mcm $(15, 42) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Como el mcm (15, 42) coincide con el obtenido en la 3.ª fase, creemos que la solución es correcta; por lo tanto, pensamos que el problema está bien resuelto.

Problema F.4

Dos rótulos luminosos se encienden con intermitencias de 48 s y 54 s, respectivamente, y lo hacen simultáneamente a las 21 h 24 min. ¿A qué hora vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:

  - Intermitencia 1.[er] rótulo: 48 s.
  - Intermitencia 2.º rótulo: 54 s.
  - Se encienden simultáneamente a las 21 h 24 min.

- Incógnitas:

  - ¿A qué hora vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez?

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, porque cuando a partir de las 21 h 24 min el 1.[er] rótulo se encienda 54 veces, habrán transcurrido 48 · 54 segundos = 2592 s, y al encenderse el 2.º rótulo 48 veces, habrán transcurrido 54 · 48 segundos = 2592 s, por lo tanto, coincidirán encendidos.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) A partir de las 21 h 24 min se volverán a encender los dos a la vez cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo de 48 s y de 54 s, es decir, cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo común de 48 s y de 54 s.
Pero como queremos saber a qué hora lo harán por primera vez, necesitamos saber el menor múltiplo común de 48 s y de 54 s, distinto de cero. Por lo tanto, debemos calcular el mcm (48, 54).
b) Sumaremos a 21 h 24 min el mcm (48, 54).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calculamos el mcm (48, 54) por la automatización del concepto, el algoritmo de los factores primos.

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.
mcm (48, 54) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 432$.

b) 432 s = 7 min 12 s, entonces, vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez: 21 h 24 min + 7 min 12 s = 21 h 31 min 12 s.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues a las 21 h 31 min 12 s, 432 s después de las 21 h 24 min, los 432 s son un intervalo de tiempo diferente de cero y múltiplo de 48 s y de 54 s.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos cuando vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez, a las 21 h 31 min 12 s (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la intermitencia de cada uno (era dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*Dos rótulos luminosos se encienden con unas determinadas intermitencias. Lo hacen simultáneamente a las 21 h 24 min y vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez a las 21 h 31 min 12 s. ¿Cuál es la intermitencia de cada rótulo?*». Esperamos que sea cada 48 s y 54 s, respectivamente.

Hacemos los cálculos necesarios:

Si los rótulos vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez a las 21 h 31 min 12 s, han tardado en encenderse ambos juntos por primera vez 432 s, el mcm de las respectivas intermitencias, esa cantidad es un múltiplo del tiempo que tardan en volver a encenderse, por lo que el tiempo de intermitencia de cada rótulo es un divisor de 432 s.

Entonces, calcularemos los divisores de 432.

$432 = 2^4 \cdot 3^3 \rightarrow$ Card [D(432)] = (4 + 1) · (3 + 1) = 5 · 4 = 20.
D(432) = {1, 2, 3, …, 48, 54, …, 144, 216, 432}.

Vemos que entre los números que tienen como mcm 432 están el 48 y el 54; como esperábamos, por tanto, pensamos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Intermitencia 1.er rótulo: 48 s.
  - Intermitencia 2.º rótulo: 54 s.
  - Se encienden simultáneamente a las 21 h 24 min.
- Incógnitas:
  - ¿A qué hora vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez?

B) ¿El problema es resoluble?

A partir de las 21 h 24 min veremos cada cuantos segundos se enciende el 1.er rótulo:

48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, 432, 480, 532…

Y ahora el 2.º rótulo:

54, 108, 162, 216, 270, 324, 378, 432, 486, 540…

Vemos que a los 432 segundos a partir de las 21 h 24 min coincidirán, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) A partir de las 21 h 24 min se volverán a encender los dos a la vez cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo de 48 s y de 54 s, es decir, cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo común de 48 s y de 54 s.
Pero, como queremos saber a qué hora lo harán por primera vez, necesitamos saber el menor múltiplo común de 48 s y de 54 s, distinto de cero. Por lo tanto, debemos calcular el mcm (48, 54).

b) Sumaremos a 21 h 24 min el mcm (48, 54).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calculamos el mcm (48, 54) por el algoritmo conceptual:

a.1) Múltiplos de 48 y de 54, distintos de cero:

M*(48): 48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, 432, 480, 532…
M*(54): 54, 108, 162, 216, 270, 324, 378, 432, 486, 540…

a.2) Múltiplos comunes de 48 y de 54, distintos de cero:

M*(48) ∩ M*(54): 432, 864, 1.296…

a.3) Menor de los múltiplos comunes de 48 y de 54, distintos de cero:

mín. [M*(48) ∩ M*(54)] = 432.

Entonces, mcm (48, 54) = 432.

b) 432 s = 7 min 12 s, por lo tanto, vuelven a encenderse los dos juntos por primera vez: 21 h 24 min + 7 min 12 s = 21 h 31 min 12 s.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues es un intervalo de tiempo diferente de cero y múltiplo de 48 s y de 54 s.

B) Comprobar la solución

Podríamos calcular el mcm (48, 54) por otro procedimiento, por el algoritmo de los factores primos.

48 = 2 · 2 · 2 · 2 · 3; 54 = 2 · 3 · 3 · 3.
mcm (48, 54) = 2 · 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 3 = 432.

Que coincide con la solución obtenida en la 3.ª fase, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema F.5

En el aula de Plástica del colegio tenemos azulejos rectangulares de 15 cm de largo por 6 cm de ancho. La maestra, como una actividad interdisciplinar de Matemáticas y Educación Plástica, nos pregunta: ¿Cuál es la medida del lado

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

del cuadrado más pequeño que se puede formar uniendo los azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ningún azulejo?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Azulejos rectangulares de 15 cm de largo por 6 cm de ancho.
  - Hacer un cuadrado uniendo los azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ningún azulejo.
- Incógnitas:
  - La medida del lado del cuadrado más pequeño que se puede formar.

B) ¿El problema es resoluble?

Si para hacer el cuadrado ponemos a lo largo 6 azulejos, unidos por el lado que mide 6 cm, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ninguno, entonces tendremos un lado del cuadrado de $6 \cdot 15$ cm = 90 cm y, si ponemos para el ancho del cuadrado 15 azulejos unidos por el lado que mide 15 cm, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ninguno, tendremos otro lado del cuadrado de $15 \cdot 6$ cm = 90 cm.

Entonces, vemos que uniendo azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ninguno, tendríamos un cuadrado de 90 cm de lado; por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como la figura que tenemos que hacer con los azulejos es un cuadrado, los dos lados tienen que medir lo mismo, por lo tanto, la medida del lado del cuadrado tendrá que ser un múltiplo de las medidas de los azulejos, 15 cm y 6 cm, diferente de cero, es decir, un múltiplo común diferente de cero.

Y como queremos que el cuadrado sea el más pequeño que se puede formar uniendo los azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ninguno, la medida del lado del cuadrado tendrá que ser el múltiplo común de 15 cm y 6 cm más pequeño, diferente de cero, entonces, tenemos que calcular el mcm (15, 6).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcm (15, 6) por el algoritmo de los factores primos.

$15 = 3 \cdot 5$; $6 = 2 \cdot 3$.
mcm $(15, 6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Luego la medida del lado del cuadrado buscado es 30 cm.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues 30 cm es un múltiplo común de 15 cm y de 6 cm, y el lado del cuadrado es menor que el encontrado en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos cuánto mide el lado del cuadrado, 30 cm (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos la longitud del ancho del azulejo rectangular (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*En el Aula de Plástica del colegio tenemos azulejos rectangulares de 15 cm de largo, todos iguales. La maestra, como una actividad interdisciplinar de Matemáticas y Educación Plástica, nos pregunta: ¿Cuál es la longitud del ancho del azulejo si el lado del cuadrado más pequeño que se puede formar mide 30 cm, uniendo los azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ningún azulejo?*». Esperamos que la respuesta sea 6 cm.

Hacemos los cálculos:

Si el lado del cuadrado más pequeño que podemos formar uniendo azulejos rectangulares de 15 cm de largo sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ningún azulejo mide 30 cm, esta longitud, es un múltiplo de las medidas de los lados del azulejo rectangular, por lo que las dimensiones del azulejo son divisores de 30 cm.

Entonces, calcularemos los divisores de 30.

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{Card}\,[D(30)] = (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Vemos que entre los números que tienen como mcm 30 está el 6; como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
    - Azulejos rectangulares de 15 cm de largo por 6 cm de ancho.
    - Hacer un cuadrado uniendo los azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ningún azulejo.
- Incógnitas:
    - Longitud del lado del cuadrado más pequeño que se puede formar.

B) ¿El problema es resoluble?

Experimentalmente podemos comprobar, como se muestra en la imagen:

que uniendo azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ninguno, tendríamos un cuadrado de $6 \cdot 10 = 4 \cdot 15 = 60$ cm de lado, entonces, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Como la figura que tenemos que hacer con los azulejos es un cuadrado, los dos lados tienen que medir lo mismo, por lo tanto, la medida del lado del cuadrado tendrá que ser un múltiplo de las medidas de los azulejos, 15 cm y 6 cm, diferente de cero, es decir, un múltiplo común diferente de cero.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Y como queremos que el cuadrado sea el más pequeño que se puede formar uniendo los azulejos sin dejar agujeros, sin que se superpongan unos a otros y sin romper ninguno, la medida del lado del cuadrado tendrá que ser el múltiplo común más pequeño de 15 cm y 6 cm, diferente de cero, entonces, tenemos que calcular el mcm (15, 6).

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcm (15, 6) por el algoritmo conceptual.

a) Calculamos múltiplos de 15 y de 6, distintos de cero:

M*(15): 15, 30, 45, 60, 75, 90…
M*(6): 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90…

b) Múltiplos comunes de 15 y de 6, distintos de cero:

M*(15) ∩ M*(6): 30, 60, 90…

c) Menor de los múltiplos comunes de 15 y de 6, distinto de cero:

mín [M*(15) ∩ M*(6)] = 30.

Entonces, mcm (15, 6) = 30.

La solución será un cuadrado de 30 cm de lado.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues 30 cm es un múltiplo de 15 cm y de 6 cm, y el lado del cuadrado es menor que el encontrado en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Calcularemos el mcm (15, 6) por otro procedimiento, por el algoritmo de los factores primos.

15 = 3 · 5, 6 = 2 · 3.
mcm (15, 6) = 3 · 5 · 2 = 30.

Luego la longitud del lado del cuadrado será de 30 cm, igual que en la 3.ª fase; por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema F.6

Dos hermanos coinciden en casa de los padres el 24 de diciembre de 2019. Por motivos de trabajo van a ver a los padres cada 14 y 30 días, respectivamente. Teniendo en cuenta que febrero de 2020 tiene 29 días, se preguntan si se volverán a ver antes de la Nochebuena de 2020 y cuántas veces.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Dos hermanos coinciden en casa de los padres el 24 de diciembre de 2019.
  - Van a ver a los padres cada 14 y 30 días, respectivamente.
  - Febrero de 2020 tiene 29 días.

- Incógnitas:
  - ¿Se volverán a ver antes de la Nochebuena de 2020?
  - ¿Cuántas veces?

B) ¿El problema es resoluble?

El 24 de diciembre de 2019 es el día cero en el que empezar a contar los días que pasan hasta que se encuentran. Como febrero del año 2020 tiene 29 días, hasta el 24 de diciembre de 2020 tienen que pasar 366 días, pues vamos a contar de 14 en 14 y después de 30 en 30 a ver si coinciden:

M*(14): 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, 182, 196, 210, 224, 238, 252, 266, 280, 294, 308, 322, 336, 350, 364…
M*(30): 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210…

Vemos que sí que coincidirán, 210 días después del 24 de diciembre de 2019, que es durante el año 2020 y antes del 24 de diciembre.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Después del 24 de diciembre de 2019 se encontrarán cuando haya transcurrido una cantidad de días que sea múltiplo de 14 y de 30, luego tendrá que ser un múltiplo común distinto de cero, y, como también queremos saber cuántas veces se encontrarán en 2020, buscaremos el menor múltiplo común de 14 y 30, diferente de cero, es decir, el mcm (14, 30).

Para saber cuántas veces coincidirán entre el 24 de diciembre de 2019 y el de 2020, veremos cuántas veces cabe el mcm (14, 30) en los 366 días que hay entre ambas fechas.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

Calculamos el mcm (14, 30) por el algoritmo conceptual.

a) Múltiplos de 14 y de 30, distintos de cero:

M*(14): 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, 182, 196, 210, 224, 238, 252, 266, 280, 294, 308, 322, 336, 350, 364…
M*(30): 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330…

b) Múltiplos comunes de 14 y de 30, distintos de cero:

M*(14) ∩ M*(30): 210, 420…

c) Menor de los múltiplos comunes de 14 y de 30, distintos de cero:
mín. [M*(14) ∩ M*(30)] = 210.

Entonces, mcm (14, 30) = 210.

Como 210 días es una cantidad menor que 366, sí se encuentran antes del 24 de diciembre de 2020 y como el mcm (14, 30) solo cabe una vez en 366 (366 = = 210 · 1 + 156, es decir, 366 : 210 tiene como cociente 1 y como resto 156), solo se verán una vez entre las noches de Nochebuena de 2019 y de 2020.

Solución: sí que se encuentran antes del 24 de diciembre de 2020 y solo una vez.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, pues 210 días es una cantidad menor que 366 días que hay entre las dos noches de Nochebuena.

B) Comprobar la solución

De las diferentes maneras de comprobar la bondad de la solución, que viene condicionada por el mcm (14, 30), elegimos la de calcularlo por otro método.

Calculamos el mcm (14, 30) por la automatización del concepto, el algoritmo de los factores primos.

$14 = 2 \cdot 7$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
mcm $(14, 30) = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 210$.

Como el mcm (14, 30) ha sido el mismo que en la 3.ª fase, la solución «sí que se encuentran antes del 24 de diciembre de 2020 y solo una vez», es correcta.

Pensamos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Creemos que la resolución podría ser igual que como estudiantado del Grado en Maestro/a de Educación Primaria.

Problema F.7

Tres empresas de transporte de larga distancia hacen el recorrido de Vila-real a Centroeuropa, siendo la longitud del trayecto, aproximadamente, de 3.000 km. La frecuencia de salida es de 10, 12 y 15 días, respectivamente. Si el 14 de marzo hicieron un viaje simultáneo, encuentra la siguiente fecha en la que vuelven a coincidir en su viaje.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Tres empresas de transporte de larga distancia hacen el recorrido de Vila-real a Centroeuropa.
  - La frecuencia de salida es de 10, 12 y 15 días, respectivamente.
  - El 14 de marzo hicieron un viaje simultáneo.
- Incógnitas:
  - La siguiente fecha en la que vuelven a coincidir en su viaje.

B) ¿El problema es resoluble?

Sí, porque sobra a partir del 14 de marzo volverán a coincidir las tres empresas en un viaje cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo de 10 días, de 12 días y de 15 días, 10 · 12 · 15 = 1.800 días.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) A partir del 14 de marzo volverán a coincidir las tres empresas cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo de 10 días, de 12 días y de 15 días, es decir, cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo común de 10, de 12 y de 15 días.
Pero necesitamos saber cuántos días pasarán hasta que hagan un viaje simultáneo por primera vez después del 14 de marzo, es decir, necesitaremos calcular el menor múltiplo común de 10, de 12 y de 15 días, distinto de cero.
Por lo tanto, calcularemos el mcm (10, 12, 15).

b) Como queremos saber qué día volverán a hacer un viaje simultáneo después del 14 de marzo, contaremos el mcm calculado a partir de esa fecha y obtendremos la fecha en la que vuelven a realizarlo.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calcularemos el mcm (10, 12, 15) por el algoritmo de los factores primos:

10 = 2 · 5; 12 = 2 · 2 · 3; 15 = 3 · 5.
mcm (10, 12, 15) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60.

Luego coincidirán 60 días después del 14 de marzo.

b) Marzo tiene 31 días, por lo que desde el 14 de marzo faltan 31 – 14 = 17 días hasta el 31.

Quedan 60 – 17 = 43 días, abril tiene 30 días, entonces, 43 – 30 = 13 días quedarán por transcurrir después del 30 de abril.

Por lo tanto, volverán a hacer un viaje simultáneo el 13 de mayo.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que el 13 de mayo es 60 días después del 14 de marzo, y 60 días es un intervalo de tiempo distinto de cero, múltiplo de 10, 12 y 15 días y, además, es menor que los 1.800 días de la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos cuándo vuelven a hacer un viaje simultaneo, el 13 de mayo (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos cada cuántos días hace un viaje la primera compañía (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*Tres empresas de transporte de larga distancia hacen el recorrido de Vila-real a Centroeuropa, siendo la longitud del trayecto, aproximadamente, de 3.000 km. La frecuencia de salida de la segunda y tercera empresa es de 12 y 15 días, respectivamente. Si el 14 de marzo hicieron un viaje simultáneo y volvieron a coincidir el 13 de mayo, encuentra la frecuencia de viaje de la primera empresa de transporte*». Esperamos que la respuesta sea cada 10 días.

Hacemos los cálculos:

Como hemos visto en la 3.ª fase entre el 14 de marzo y el 13 de mayo hay 60 días.

Si los viajes de las tres compañías vuelven a coincidir por primera vez a los 60 días de haber salido simultáneamente, esa cantidad, el mcm de las respectivas frecuencias de viaje, es un múltiplo del tiempo que tarda en volver a tener una salida cada compañía, por lo que el tiempo de frecuencia de viaje de cada compañía es un divisor de 60 días.

Entonces, calcularemos los divisores de 60.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{Card}\ [D(60)] = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$

$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$

Vemos que entre los divisores de 60 está el 10, entonces, entre los números que junto con el 12 y el 15 pueden tener como mcm 60 está el 10; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Tres empresas de transporte de larga distancia hacen el recorrido de Vila-real a Centroeuropa.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

- La frecuencia de salida es de 10, 12 y 15 días, respectivamente.
- El 14 de marzo hicieron un viaje simultáneo.

• Incógnitas:

- La siguiente fecha en la que vuelven a coincidir en su viaje.

B) ¿El problema es resoluble?

Veremos a partir del 14 de marzo cada cuántos días tiene un viaje la primera empresa: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80…

Ahora la segunda: 12, 24, 36, 48, 60, 72…

Y finalmente, la tercera: 15, 30, 45, 60, 75…

Vemos que a los 60 días a partir del 14 de marzo coincidirán, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) A partir del 14 de marzo volverán a coincidir las tres empresas cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo de 10 días, de 12 días y de 15 días, es decir, cuando haya transcurrido una cantidad de tiempo que sea múltiplo común de 10, de 12 y de 15 días.
Pero, necesitamos saber cuántos días pasarán hasta que hagan un viaje simultáneo por primera vez después del 14 de marzo, es decir, necesitaremos calcular el menor múltiplo común de 10, de 12 y de 15 días, distinto de cero. Por lo tanto, calcularemos el mcm (10, 12, 15).

b) Como queremos saber qué día volverán a hacer un viaje simultáneo después del 14 de marzo, contaremos el mcm calculado a partir de esa fecha y obtendremos la fecha en la que vuelven a realizarlo.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calcularemos el mcm (10, 12, 15) por el algoritmo conceptual.

a.1) Múltiplos de 10, de 12 y de 15, distintos de cero:

M*(10): 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130…
M*(12): 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132…
M*(15): 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150…

a.2) Múltiplos comunes de 10, de 12 y de 15, distintos de cero:

M*(10) ∩ M*(12) ∩ M*(15): 60, 120…

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

a.3) Menor de los múltiplos comunes de 10, de 12 y de 15, distintos de cero:

mín. [M*(10) ∩ M*(12) ∩ M*(15)] = 60.

Entonces, mcm (10, 12, 15) = 60.
Luego, coincidirán dentro de 60 días.

b) Marzo tiene 31 días, por lo que desde el 14 de marzo faltan 31 – 14 = 17 días hasta el 31.

Quedan 60 – 17 = 43 días, abril tiene 30 días, entonces, 43 – 30 = 13 días quedarán por transcurrir después del 30 de abril, que será el 13 de mayo.
Por lo tanto, volverán a hacer un viaje simultáneo el 13 de mayo.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, ya que el 13 de mayo es 60 días después del 14 de marzo, y 60 días es un intervalo de tiempo distinto de cero, múltiplo de 10, 12 y 15 días.

B) Comprobar la solución

Podríamos calcular el mcm (10, 12, 15) por otro procedimiento, por el algoritmo de los factores primos.

10 = 2 · 5; 12 = 2 · 2 · 3; 15 = 3 · 5.
mcm (10, 12, 15) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60.

Luego, coincidirán 60 días después del 14 de marzo, es decir el 13 de mayo, igual que en la 3.ª fase, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Tema 6. Otros problemas

6.1. Introducción

En este último tema nos salimos del carácter general de los problemas vistos hasta este momento, la vinculación con la asignatura MP1006 Didáctica de las Matemáticas I (UJI, Plan de Estudios 2010) o MP1806 Didáctica de las Matemáticas I (reforma/modificación de 2018) o con el texto Alcalde, Pérez y Lorenzo (2014), para pasar a exponer unos problemas que tienen vinculación con las asignaturas MP1019 Didáctica de las Matemáticas II y/o MP1025 Didáctica de las Matemáticas III (UJI, Plan de Estudios 2010), los contenidos de las cuales son desarrollados en Pérez, Alcalde y Lorenzo (2014) y Lorenzo, Alcalde y Pérez (2015), respectivamente.

Las asignaturas MP1019 Didáctica de las Matemáticas II y MP1025 Didáctica de las Matemáticas III del Plan de Estudios 2010 del Grado en Maestro/a de Educación Primaria en la UJI, con la reforma/modificación de 2018 se fundirán en una misma asignatura, a excepción del tema «Números enteros» que pasa a la asignatura MP1806 Didáctica de las Matemáticas I.

6.2. Problemas

Problema G.1

En un termómetro aparecen marcadas las temperaturas 0 ºC, –48 ºC y +60 ºC. Hay que terminarlo de graduar, de manera que la diferencia entre dos señales consecutivas sea siempre del mismo número de grados, diferencia que tendrá que ser una cantidad de grados entera y mayor que 1 ºC. ¿Cuál es el número mínimo de señales, de marcas, que se pueden hacer?

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - En un termómetro aparecen marcadas las temperaturas 0 ºC, –48 ºC y +60 ºC.
  - Hay que terminarlo de graduar, de manera que la diferencia entre dos señales consecutivas sea siempre del mismo número de grados, diferencia que tendrá que ser una cantidad de grados entera y mayor que 1 ºC.
- Incógnitas:
  - Número mínimo de señales, de marcas, que se pueden hacer.

B) ¿El problema es resoluble?

Como en el termómetro se tiene la referencia 0 ºC, en el problema hay que graduar, hacer partes iguales, dos tramos del termómetro de «longitudes» 48 ºC y 60 ºC.
Ya que 48 ºC y 60 ºC son divisibles por 2, podríamos graduar el termómetro en las condiciones establecidas por el enunciado haciendo marcas cada 2 ºC. Por lo tanto, el problema es resoluble, y el número de señales sería 52.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como las señales, las marcas, deben ser siempre del mismo número de grados, que tendrá que ser una cantidad de grados entera, la separación entre dos señales consecutivas debe ser un número natural divisor común de los dos tramos, de «longitudes» 48 ºC y 60 ºC, es decir, un número natural divisor común de 48 ºC y de 60 ºC.
Pero como también queremos el número mínimo de marcas, la distancia, la separación entre ellas, deberá ser el número natural divisor común de 48 ºC y de 60 ºC mayor, es decir, el mcd (48, 60).

b) Para encontrar el número mínimo de señales, dividiremos la «longitud» total del termómetro a graduar, entre el mcd (48, 60), teniendo en cuenta las marcas que ya tiene el termómetro, 0 ºC, –48 ºC y +60 ºC.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calcularemos el mcd (48, 60) por el algoritmo de los factores primos.

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.
mcd (48, 60) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

La distancia entre dos señales consecutivas tendrá que ser 12 ºC.

b) Número mínimo de señales:

«Longitud» total del termómetro a graduar 48 ºC + 60 ºC = 108 ºC.
108 : 12 = 9 es el número de partes iguales entre –48 ºC y +60 ºC, pero como ya tenemos las señales 0 ºC, –48 ºC y +60 ºC, en realidad, para señalizar esas 9 partes iguales, solo hacen falta 7 señales.

Solución: el número mínimo de señales, de marcas, que se pueden hacer es 7.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

12 ºC es un divisor de 48 ºC y de 60 ºC y, además de ser mayor que la distancia propuesta en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*, también hace que el número de marcas sea menor; por lo tanto, la solución 7 señales, sí es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar los datos proporcionalmente», concretamente, podríamos reducir los datos a la mitad, por lo que tenemos el nuevo problema: «*En un termómetro aparecen marcadas las temperaturas 0 ºC, –24 ºC y +30 ºC. Hay que terminarlo de graduar, de manera que la diferencia entre dos señales consecutivas sea siempre del mismo número de grados, diferencia que tendrá que ser una cantidad de grados entera y mayor que 1 ºC. ¿Cuál es el número mínimo de señales, de marcas, que se pueden hacer?*».

Tal y como hemos explicado en la 2.ª fase, para encontrar el número mínimo de señales, dividiremos la «longitud» total del termómetro a graduar, entre el mcd (24, 30), teniendo en cuenta las marcas que ya tiene el termómetro, 0 ºC, –24 ºC y +30 ºC.

La «longitud» total del termómetro a graduar, 24 ºC + 30 ºC = 54 ºC, se ha reducido a la mitad, y sabemos que el mcd (24, 30) es la mitad del mcd (48, 60), por lo que, como tanto el dividendo como el divisor de la división se han

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

reducido a la mitad de la división de la 3.ª fase, *b*), el cociente ahora, en el nuevo problema será el mismo, 9 partes iguales entre –24 ºC y +30 ºC.

Como ya tenemos las señales 0 ºC, –24 ºC y +30 ºC, en realidad, para señalizar esas 9 partes iguales, solo hacen falta 7 señales.

Por lo tanto, esperamos que la solución del nuevo problema sea: el número mínimo de señales, marcas, que se pueden hacer es 7.

Hacemos los cálculos necesarios:

a) Calcularemos el mcd (24, 30) por el algoritmo de los factores primos.

24 = 2 · 2 · 2 · 3; 30 = 2 · 3 · 5.
mcd (48, 60) = 2 · 3 = 6.
La distancia entre dos señales consecutivas tendrá que ser 6 ºC.

b) Número mínimo de señales:

«Longitud» total del termómetro a graduar 24 ºC + 30 ºC = 54 ºC.
54 : 6 = 9 es el número de partes iguales entre –24 ºC y +30 ºC, pero como ya tenemos las señales 0 ºC, –24 ºC y +30 ºC, en realidad, para señalizar esas 9 partes iguales, solo hacen falta 7 señales.

Como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - En un termómetro aparecen marcadas las temperaturas 0 ºC, –48 ºC y +60 ºC.
  - Hay que terminarlo de graduar, de manera que la diferencia entre dos señales consecutivas sea siempre del mismo número de grados, diferencia que tendrá que ser una cantidad de grados entera y mayor que 1 ºC.
- Incógnitas:
  - Número mínimo de señales, de marcas, que se pueden hacer.

B) ¿El problema es resoluble?

Como en el termómetro se tiene la referencia 0 ºC, en el problema hay que graduar, hacer partes iguales, dos tramos del termómetro de «longitudes» 48 ºC y 60 ºC.

Ya que 48 ºC y 60 ºC son divisibles por 2, podríamos graduar el termómetro en las condiciones establecidas por el enunciado haciendo marcas cada 2 ºC.

Por lo tanto, el problema es resoluble, y el número de señales sería 52.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como las señales, las marcas, deben ser siempre del mismo número de grados, que tendrá que ser una cantidad de grados entera, la separación entre dos señales consecutivas debe ser un número natural divisor común de los dos tramos, de «longitudes» 48 ºC y 60 ºC, es decir, un número natural divisor común de 48 ºC y de 60 ºC.
Pero como también queremos el número mínimo de marcas, la distancia, la separación entre ellas, deberá ser el número natural divisor común de 48 ºC y de 60 ºC mayor, es decir, el mcd (48, 60).

b) Para encontrar el número mínimo de señales, iremos haciendo las marcas desde -48 ºC hasta +60 ºC y las contaremos.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Calcularemos el mcd (48, 60) por el algoritmo conceptual:

D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}.
D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
D(48) ∩ D(60) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.
mcd (48, 60) = 12.

La distancia entre dos señales consecutivas tendrá que ser 12 ºC.

b) Número mínimo de señales:

Marcas: **–48 ºC**, –36 ºC, –24 ºC, –12 ºC, **0 ºC**, +12 ºC, +24 ºC, +36 ºC, +48 ºC, **+60 ºC**, entonces, solo hacen falta 7 señales.

Solución: el número mínimo de señales, de marcas, que se pueden hacer es 7.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

12 ºC es un divisor de 48 ºC y de 60 ºC, y además de ser mayor que la distancia propuesta en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*, también hace que el número de marcas sea menor; por lo tanto, la solución 7 señales sí es razonable.

B) Comprobar la solución

El número de señales, de marcas, viene condicionado por la separación entre ellas, el mcd (48, 60), por lo que para comprobar la solución, comprobaremos si

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

hemos calculado bien el mcd (48, 60). Lo calcularemos ahora por el algoritmo de los factores primos.

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.
mcd $(48, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Como el valor obtenido en la 3.ª fase, y como repasadas las señales hechas entre -48 ºC y +60 ºC, son correctos, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema G.2

En una parada de frutas y verduras, los cinco sextos de la recaudación de las ventas de un día corresponden al apartado de frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los tres octavos corresponden a naranjas. Si la venta de naranjas sube a 89 euros, ¿qué «caja» ha hecho el establecimiento este día?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Los cinco sextos de la recaudación de las ventas de un día corresponden al apartado de frutas.
  - Del dinero recaudado en la venta de fruta, los tres octavos corresponden a naranjas.
  - La venta de naranjas sube a 89 euros.
- Incógnitas:
  - «Caja» hecha por el establecimiento este día.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «x» a la recaudación del día, los datos del enunciado los podemos traducir en la ecuación: $\frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}x\right) = 89$.

Ecuación con una incógnita, por lo que el problema es resoluble.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos la ecuación.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

$$\frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}x\right) = 89 \rightarrow \frac{15}{48}x = 89 \rightarrow x = 89 : \frac{15}{48} = \frac{89 \cdot 48}{15} = \frac{4.272}{15} = 284{,}80\ €$$

Solución: la «caja» hecha por el establecimiento este día ha sido de 284,80 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Si los 89 € de la venta de las naranjas, los redondeamos a 90 €, como son tres octavos de la recaudación de las frutas, luego 30 € sería casi un octavo, entonces, por las frutas se habrían obtenido 30 · 8 = 240 €, que deberían ser los cinco sextos de la recaudación total, es decir, cada un sexto sería aproximadamente 48 €, redondeamos a 50 €, por lo tanto, la estimación es que la recaudación del día sería, más o menos, 50 · 6 = 300 €, siendo el valor real 284,80 €. Pensamos, pues, que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, utilizamos el método «cambio de dato por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la «caja» hecha por el establecimiento este día, 284,80 € (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos a cuántos euros sube la venta de naranjas (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*En una parada de frutas y verduras, los cinco sextos de la recaudación de las ventas de un día corresponden al apartado de frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los tres octavos corresponden a naranjas. Si la venta del día asciende a 284,80 €, ¿qué «caja» ha hecho el establecimiento por la venta de las naranjas?*». Esperamos que la respuesta sea 89 €.

Hacemos los cálculos necesarios:

La venta de las naranjas es los tres octavos de los cinco sextos de la venta del día, es decir: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48}$.

Si la venta del día asciende a 284,80 €, la recaudación por la venta de las naranjas será $\frac{15}{48}$ de 284,80 = $\frac{15}{48} \cdot 284{,}80 = 89$ €; como esperábamos, por tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

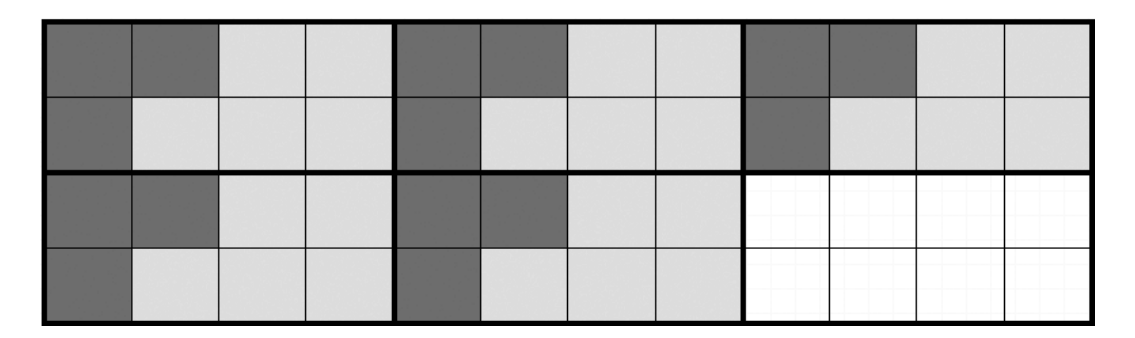
- Datos:
  - Los cinco sextos de la recaudación de las ventas de un día corresponden al apartado de frutas.
  - Del dinero recaudado en la venta de fruta, los tres octavos corresponden a naranjas.
  - La venta de naranjas sube a 89 euros.
- Incógnitas:
  - «Caja» hecha por el establecimiento este día.

B) ¿El problema es resoluble?

Para ver si el problema es resoluble lo justificamos mediante un dibujo.
Imaginemos que la recaudación del día, la «caja» hecha por el establecimiento este día, que se quiere calcular, se representa por este rectángulo:

Si los cinco sextos corresponden a la recaudación de fruta, para saber cuánto trozo del rectángulo representa a las frutas habrá que dividirlo en seis partes iguales y colorear cinco:

Como tres octavos de la recaudación de fruta corresponden a naranjas, para representar lo correspondiente a las naranjas en el rectángulo, habría que dividir la superficie coloreada en ocho partes iguales y coger tres. Pero como esto resulta problemático, es más fácil, por ejemplo, fraccionar en ocho partes iguales cada división anterior (las sextas partes del rectángulo) y coger tres de cada ocho de las partes coloreadas:



Como sabemos cuánto representa la parte sombreada oscura, 89 €, calcular cuántos euros representa la superficie total del rectángulo es posible, por lo que el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Partiendo del último dibujo de la fase anterior, calcularemos cuántos rectángulos sombreados oscuros representan la recaudación correspondiente a las naranjas.
b) Calcularemos cuántos euros representa cada rectángulo sombreado oscuro, dividiendo la cantidad de euros obtenidos por la venta de las naranjas entre el número de rectángulos sombreados oscuros.
c) Calcularemos cuántos rectángulos del tamaño de los sombreados oscuros forman el rectángulo grande, el rectángulo que representa la «caja» hecha por el establecimiento este día.
d) Por último, multiplicaremos los euros que representa cada rectángulo sombreado oscuro por el número de rectángulos del tamaño de los sombreados oscuros, con lo que calcularemos cuántos euros son la «caja» hecha por el establecimiento este día.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 3 rectángulos sombreados oscuros en cada uno de los 5 rectángulos sombreados hacen un total de 3 · 5 = 15 rectángulos sombreados oscuros.
b) 89 : 15 = 5,93 € representa cada rectángulo sombreado oscuro.
c) 8 rectángulos, del tamaño de los sombreados oscuros, en cada uno de los 6 rectángulos en los que hemos fraccionado el rectángulo grande, hacen un total de 8·6 = 48 rectángulos del tamaño de los sombreados oscuros.
d) 5,93 · 48 = (89 : 15) · 48 = 284,80 €.

Solución: la «caja» hecha por el establecimiento este día ha sido 284,80 €.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Si los 89 € de la venta de las naranjas, los redondeamos a 90 €, como son 3/8 de la recaudación de las frutas, luego 30 € sería casi 1/8, entonces, por las frutas se habrían obtenido 30 · 8 = 240 €, que deberían ser los 5/6 de la recaudación total, es decir, cada 1/6 sería aproximadamente 48 €, redondeamos a 50 €, por lo tanto, la estimación es que la recaudación del día sería, más o menos, 50 · 6 = 300 €, siendo el valor real 284,80 €. Pensamos pues, que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Para asegurarnos de que la solución es correcta, utilizamos el método «cambio de dato por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la «caja» hecha por el establecimiento este día, 284,80 € (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos a cuántos euros sube la venta de naranjas (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*En una parada de frutas y verduras, los 5/6 de la recaudación de las ventas de un día corresponden al apartado de frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los 3/8 corresponden a naranjas. Si la venta del día asciende a 284,80 €, ¿qué «caja» ha hecho el establecimiento por la venta de las naranjas?*». Esperamos que la respuesta sea 89 €.

Hacemos los cálculos necesarios:

La venta de las naranjas es los tres octavos de los cinco sextos de la venta del día, es decir: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48}$.

Si la venta del día asciende a 284,80 €, la recaudación por la venta de las naranjas será $\frac{15}{48}$ de 284,80 = $\frac{15}{48} \cdot 284{,}80 = 89$ €; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

Problema G.3

El Sr. Lorenzo decide repartir su capital en partes iguales entre sus tres hijos: Roberto, Jorge y Gloria, reservándose para sí un quinto del total. A su vez, Roberto renuncia a sus derechos a favor de sus hijas: Ana, Mercedes y María, que se reparten lo heredado en partes iguales. Jorge es el padrino de María y le da la mitad de lo que le corresponde a él, entonces, María recibe en total 8.000 €. ¿Con cuántos euros se quedó el Sr. Lorenzo?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El Sr. Lorenzo decide repartir su capital en partes iguales entre sus tres hijos: Roberto, Jorge y Gloria, reservándose para sí un quinto del total.
  - Roberto renuncia a sus derechos a favor de sus hijas: Ana, Mercedes y María, que se reparten lo heredado en partes iguales.
  - Jorge es el padrino de María y le da la mitad de lo que le corresponde a él, entonces, María recibe en total 8.000 €.

- Incógnitas:
  - Cuántos euros se quedó el Sr. Lorenzo.

B) ¿El problema es resoluble?

Como el Sr. Lorenzo se quedó un quinto de lo que tenía, repartió entre sus tres hijos cuatro quintos, algunos de los cuales repartieron también todo o parte de lo que heredaron.

Como la única cantidad de euros que conocemos es la que recibió María, si consideramos como «x» la cantidad que María recibe de su padre Roberto, entonces, la cantidad que recibe Roberto en herencia de su padre, que simbolizamos por «R», será R = 3x, que es la misma que recibe su hermano Jorge, que simbolizamos por «J», J = 3x, y que su hermana Gloria.

La herencia total que recibe María, 8.000 €, le proviene de su padre, x, y de su padrino, Jorge, que le da la mitad de lo que le corresponde a él, $1/2 \cdot J = 1/2 \cdot (3\,x) = 1{,}5 \cdot x$, entonces, $8.000\ € = 1 \cdot x + 1{,}5 \cdot x = 2{,}5 \cdot x$, luego podemos calcular x.

El Sr. Lorenzo repartió entre sus tres hijos cuatro quintos en partes iguales, como Roberto recibió R = 3x, los cuatro quintos serán equivalentes a 9x, y como podemos saber a cuántos euros equivale lo considerado como x, podemos calcular cuántos euros son los cuatro quintos y, por lo tanto, cuánto es un quinto, cantidad que se quedó el Sr. Lorenzo; entonces, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Siguiendo el razonamiento hecho en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*:

a) Resolveremos la ecuación $8.000 = 2{,}5 \cdot x$.

b) Calcularemos la cantidad de euros que repartió el Sr. Lorenzo entre sus hijos, $9 \cdot x$, que corresponde a cuatro quintos del dinero que tenía.
c) Como el Sr. Lorenzo se quedó un quinto del dinero que tenía, dividiremos la cantidad obtenida en el apartado anterior entre 4 para obtener el dinero que se quedó él.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $8.000 = 2,5 \cdot x \rightarrow x = 8.000 : 2,5 = 3.200$ €.
b) $9 \cdot x = 9 \cdot 3.200 = 28.800$ €, corresponde a los cuatro quintos del dinero que tenía el Sr. Lorenzo.
c) $28.800 : 4 = 7.200$ € es el dinero que se quedó el Sr. Lorenzo.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El Sr. Lorenzo repartió entre sus tres hijos, en partes iguales, cuatro quintos del capital que tenía, luego cada uno de los hijos recibió cuatro quinceavos del capital.

María recibió $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{45} + \frac{4}{30} = \frac{8}{90} + \frac{12}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$ del dinero que tenía el Sr. Lorenzo, que son 8.000 €.

El Sr. Lorenzo se quedó $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ de su dinero, 7.200 €.

Como el Sr. Lorenzo se quedó $\frac{2}{10}$ de su dinero y María recibió $\frac{2}{9}$ del dinero que tenía él, siendo $\frac{2}{10} < \frac{2}{9}$, la cantidad de dinero que se quedó el Sr. Lorenzo, 7.200 €, tiene que ser menor que la que recibió María, 8.000 €, como así es; por lo tanto, la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos con cuántos euros se quedó el Sr. Lorenzo, 7.200 € (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos la cantidad que recibe María (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*El Sr. Lorenzo decide repartir su capital en partes iguales entre sus tres hijos: Roberto, Jorge y Gloria, reservándose para sí un quinto del total, que son 7.200 €. A su vez, Roberto renuncia a sus derechos a favor de sus hijas: Ana, Mercedes y María, que se reparten lo heredado en partes iguales. Jorge es el padrino de María y le da a esta la mitad de lo que le corresponde a él. ¿Cuánto recibió María?*». Esperamos que la respuesta sea 8.000 €.

Hacemos los cálculos:

Llamamos «y» al dinero que tenía el Sr. Lorenzo antes de repartirlo.

7.200 = 1 : 5 · y → y = 5 · 7.200 = 36.000 €.

Reparte a partes iguales entre sus hijos: 4 : 5 · 36.000 = 28.800 €.

Cada hijo recibe: 28.800 : 3 = 9.600 €.

Roberto le da a María 9.600 : 3 = 3.200 € y Jorge 9.600 : 2 = 4.800 €.

María recibe en total: 3.200 + 4.800 = 8.000 €; como esperábamos, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El Sr. Lorenzo decide repartir su capital en partes iguales entre sus tres hijos: Roberto, Jorge y Gloria, reservándose para sí un quinto del total.
  - Roberto renuncia a sus derechos a favor de sus hijas: Ana, Mercedes y María, que se reparten lo heredado en partes iguales.
  - Jorge es el padrino de María, y le da a esta la mitad de lo que le corresponde a él, entonces, María recibe en total 8.000 €.
- Incógnitas:
  - Euros que se quedó el Sr. Lorenzo.

B) ¿El problema es resoluble?

Como el Sr. Lorenzo reparte los cuatro quintos de su dinero a partes iguales entre sus tres hijos, cada uno de ellos recibe $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$. Roberto le da a su hija María un tercio de la parte que recibe, es decir, $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{45}$. Jorge le da a su ahijada María un medio de la parte que recibe, es decir, $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{30}$.

María recibe $\frac{4}{45} + \frac{4}{30} = \frac{8}{90} + \frac{12}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$ del dinero que reparte el Sr. Lorenzo, en total, 8.000 €. Luego podemos calcular el dinero que tenía él y después calcular un quinto de esta cantidad para saber así el dinero que se queda el Sr. Lorenzo.

Por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Siguiendo el razonamiento hecho en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*:

a) Calcularemos la cantidad de la que los dos novenos son 8.000 €. Primero, dividiremos entre 2 para saber cuánto es un noveno de la cantidad y, por último, multiplicaremos por 9 para calcular cuál es la cantidad de dinero que tenía antes de repartirlo.
b) Como el Sr. Lorenzo se quedó un quinto del dinero que tenía, dividiremos la cantidad obtenida en el apartado anterior entre 5 para obtener el dinero que se quedó él.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 8.000 : 2 = 4.000 → 4.000 · 9 = 36.000 € tenía antes de repartirlo.

b) 36.000 : 5 = 7.200 € se quedó el Sr. Lorenzo.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

María recibió $\frac{2}{9}$ del dinero que tenía el Sr. Lorenzo, que son 8.000 €.

El Sr. Lorenzo se quedó $\frac{1}{5}$ de su dinero, 7.200 €.

Como el Sr. Lorenzo se quedó $\frac{1}{5}$ de su dinero y María recibió 2 / 9 del dinero que tenía el Sr. Lorenzo, siendo $\frac{1}{5} = \frac{9}{45}$ i $\frac{2}{9} = \frac{10}{45}$ tenemos que $\frac{9}{45} < \frac{10}{45}$, entonces, $\frac{1}{5} < \frac{2}{9}$, luego la cantidad de dinero que se quedó el Sr. Lorenzo, 7.200 €, tiene que ser menor que la que recibió María, 8.000 €, como así es; por lo tanto, la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos con

cuántos euros se quedó el Sr. Lorenzo, 7.200 € (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema), y calcularemos la cantidad que recibe María (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: «*El Sr. Lorenzo decide repartir su capital en partes iguales entre sus tres hijos: Roberto, Jorge y Gloria, reservándose para sí un quinto del total, que son 7.200 €. A su vez, Roberto renuncia a sus derechos a favor de sus hijas: Ana, Mercedes y María, que se reparten lo heredado en partes iguales. Jorge es el padrino de María y le da a esta la mitad de lo que le corresponde a él. ¿Cuánto recibió María?*». Esperamos que la respuesta sea 8.000 €.

Hacemos los cálculos:

7.200 és $\frac{1}{5}$ del dinero que tenía el Sr. Lorenzo, luego el dinero que él tenía son 7.200 · 5 = 36.000 €.

Reparte a partes iguales entre sus hijos: $\frac{4}{5} \cdot 36.000 = 28.800$ €.

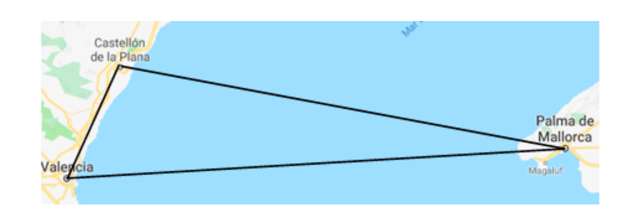
Cada hijo recibe: 28.800 : 3 = 9.600 €.

Roberto le da a María 9.600 : 3 = 3.200 €, y Jorge 9.600 : 2 = 4.800 €.

María recibe en total: 3.200 + 4.800 = 8.000 €; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto.

Problema G.4

Sabiendo que una milla marina o milla náutica equivale a 1.852 m, encuentra la distancia, en la unidad fundamental correspondiente en el Sistema Internacional (SI), entre Castelló de la Plana y Palma de Mallorca, si sabemos que hay 72 millas marinas de Valencia a Palma de Mallorca, 72 km de Castelló de la Plana a Valencia y suponiendo que las tres ciudades se sitúan en los vértices de un hipotético triángulo rectángulo.



❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Una milla marina o milla náutica equivale a 1.852 m.
  - Hay 72 millas marinas de Valencia a Palma de Mallorca.
  - Hay 72 km de Castelló de la Plana en Valencia.
  - Las tres ciudades se sitúan en los vértices de un hipotético triángulo rectángulo.

- Incógnitas:
  - La distancia, en la unidad fundamental correspondiente en el Sistema Internacional (SI), entre Castelló de la Plana y Palma de Mallorca.

B) ¿El problema es resoluble?

Como el problema pide la distancia «en la unidad fundamental correspondiente en el SI», es decir, en metros, tendremos que pasar todas las distancias a metros.

Las tres ciudades se sitúan en los vértices de un hipotético triángulo rectángulo, por lo que conoceríamos la medida de la hipotenusa (Valencia-Palma de Mallorca) y del cateto menor (Castelló de la Plana-Valencia), entonces, por el teorema de Pitágoras sabemos que podemos calcular la medida del otro cateto, la distancia entre Castelló de la Plana y Palma de Mallorca.

Por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Convertiremos la distancia de Valencia a Palma de Mallorca de millas náuticas (mn) a metros y la distancia de Castelló de la Plana a Valencia de kilómetros a metros, con lo que tendremos todos los datos en metros.

b) Si llamamos «x» a la distancia de Castelló de la Plana a Palma de Mallorca, entonces, por el teorema de Pitágoras se tendrá que cumplir que: x^2 mas la distancia de Castelló de la Plana a Valencia elevada al cuadrado tendrá que ser igual a la distancia de Valencia a Palma de Mallorca elevada al cuadrado, por lo tanto, tendremos una ecuación con una incógnita.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 72 mn · 1.852 m/mn = 133.344 m; 72 km = 72.000 m.

b*)* $x^2 + 72.000^2 = 133.344^2 \rightarrow x^2 = 133.344^2 - 72.000^2 = 17.780_1622.336 -$
$- 5.184_1000.000 = 12.596_1622.336 \rightarrow x = 112.234{,}67$ m.

Solución: la distancia entre Castelló de la Plana y Palma de Mallorca es de 112.234,67 m.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Como la distancia entre Castelló de la Plana y Palma de Mallorca es la longitud del cateto mayor del triángulo rectángulo, 112.234,67 m, tiene que ser mayor que la medida del cateto menor, la distancia de Castelló de la Plana a Valencia, 72.000 m, y menor que la longitud de la hipotenusa, la distancia de Valencia a Palma de Mallorca, 133.344 m, y lo es, por lo que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Para ver la corrección de la solución utilizamos el método «cambio de dato por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos la distancia entre Castelló de la Plana y Palma de Mallorca, 112.234,67 m (era incógnita y pasa a ser dato en el nuevo problema) y calcularemos la distancia de Valencia a Palma de Mallorca (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el nuevo problema: «*Encuentra la distancia entre Valencia y Palma de Mallorca (viajando en barco) si sabemos que de Castelló de la Plana a Palma de Mallorca hay 112.234,67 m y 72.000 m de Castelló de la Plana a Valencia (viajando en coche)*». Esperamos que la respuesta sea 133.344 m.

Hacemos los cálculos necesarios:

Las tres ciudades se sitúan en los vértices de un hipotético triángulo rectángulo, conocemos la medida del cateto mayor, la distancia Castelló de la Plana-Palma de Mallorca, la del cateto menor, la distancia Castelló de la Plana-Valencia, y desconocemos la medida de la hipotenusa, distancia Valencia-Palma de Mallorca, entonces, por el teorema de Pitágoras la podemos calcular.

Llamamos «y» a la distancia de Valencia a Palma de Mallorca, por tanto:

$y^2 = 112.234{,}67^2 + 72.000^2 = 12.596_1621.150 + 5.184_1000.000 =$
$= 17.780_1621.150 \rightarrow y = 133.344$ m.

Como esperábamos, por tanto, pensamos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Pensamos que la resolución del problema es igual que para el estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, ya que, como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria.

Pero, en este en concreto, también hemos aplicado el teorema para calcular la medida de un cateto conocidas la medida de la hipotenusa y la del otro cateto ($a^2 = h^2 - b^2$), lo que hemos justificado en el problema B.8, por tanto, al utilizar el teorema de Pitágoras de esta manera estamos aplicando conocimientos que el alumnado de 6.º curso debe de tener alcanzados.

Problema G.5

El tamaño de la pantalla de una televisión se mide, como sabes, en pulgadas. De hecho, el número de pulgadas de una televisión indica la longitud de la diagonal de la pantalla. Así pues, encuentra las dimensiones de una pantalla de TV de 32 pulgadas sabiendo que la proporción entre sus lados es 4:3.

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - El número de pulgadas de una televisión indica la longitud de la diagonal de la pantalla.
  - Una pantalla de TV de 32 pulgadas sabiendo que la proporción entre sus lados es 4:3.
- Incógnitas:
  - Las dimensiones de la pantalla de TV.

B) ¿El problema es resoluble?

Si llamamos «x» a la medida en pulgadas del ancho de la pantalla de la TV e «y» a la medida en pulgadas de la altura de la pantalla, entonces por el teorema de Pitágoras se tendrá que cumplir: $x^2 + y^2 = 32^2$.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Por otra parte, 4:3 es la proporción entre las longitudes de los lados de la pantalla de la TV, entonces: $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

Los datos del problema se traducen en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\}$.

Procedemos a triangularizar el sistema de ecuaciones para ver si es resoluble:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.024 \\ 3x = 4y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.024 \\ 3x - 4y = 0 \end{array}\right\}.$$

La representación gráfica, en dos dimensiones, de la primera ecuación es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y radio 32, y la de la segunda ecuación, es una recta que pasa por el origen de coordenadas, por lo que ambas figuras, se cortarán en dos puntos, que serán las soluciones del sistema de ecuaciones, luego el sistema es resoluble; entonces, creemos que, posiblemente, el problema también lo es.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

Resolveremos el sistema de ecuaciones.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.024 \\ x = \frac{4y}{3} \end{array}\right\}.$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$\left(\frac{4y}{3}\right)^2 + y^2 = 1.024 \rightarrow \frac{16y^2}{9} + y^2 = 1.024 \rightarrow \frac{16y^2}{9} + \frac{9y^2}{9} = 1.024 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{25y^2}{9} = 1.024 \rightarrow y^2 = (1.024 \cdot 9) : 25 = 368{,}64 \rightarrow y = \sqrt{368{,}64} = 19{,}2$$

pulgadas de alta.

De donde, $x = \frac{4y}{3} = \frac{4 \cdot 19{,}2}{3} = 25{,}6$ pulgadas de ancha.

Comprobamos que el sistema $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array}\right\}$ està correctamente resuelto sustituyendo los valores encontrados:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = (25{,}6)^2 + (19{,}2)^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = 1.024 = 32^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{25{,}6}{19{,}2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} = \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{array}\right\}.$$

Por tanto, el sistema está correctamente resuelto.

Solución: la pantalla de la TV tiene 25,6 pulgadas de ancha y 19,2 pulgadas de alta.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

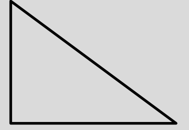
La solución es razonable, pues las dimensiones de los lados de la pantalla de la TV son menores que la dimensión de su diagonal.

B) Comprobar la solución

Aplicamos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos las dimensiones de la pantalla de televisión, 25,6 y 19,2 pulgadas (eran incógnitas y pasan a ser datos en el nuevo problema) y calcularemos la diagonal de la pantalla (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el problema: «*El tamaño de la pantalla de una televisión se mide, como sabes, en pulgadas. De hecho, el número de pulgadas de una televisión indica la longitud de la diagonal de la pantalla. Así pues, encuentra el tamaño de una pantalla de TV sabiendo que mide 25,6 pulgadas de ancha y 19,2 pulgadas de alta. ¿Cuál es la proporción entre el ancho y el alto de la pantalla?*». Esperamos que tenga 32 pulgadas de diagonal y que la proporción sea 4:3.

Hacemos los cálculos necesarios:

Conocemos el ancho y el alto de la pantalla de la TV, que lógicamente es rectangular, y la dimensión que queremos calcular es su diagonal; como vemos en el dibujo, los lados de la TV y su diagonal forman un triángulo rectángulo del que conocemos la medida de los catetos, 25,6 pulgadas y 19,2 pulgadas, y desconocemos la medida de la hipotenusa, que llamaremos «h».



Por el teorema de Pitágoras tenemos: $h^2 = 25{,}6^2 + 19{,}2^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = 1024 \rightarrow h = \pm\sqrt{1024} = \pm 32$, como estamos calculando longitudes nos quedamos con el valor positivo de la raíz, por lo tanto, la TV tiene 32 pulgadas de diagonal, como esperábamos.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

La proporción entre el ancho y el alto de la pantalla es: $\frac{25,6}{19,2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} = \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, luego la relación entre sus lados es 4:3, como esperábamos.

Ambas soluciones son las esperadas, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria.

Por otro lado, según el Decreto 108/2014, en el 6.º curso de Educación Primaria, en el bloque 4: Geometría, del área de Matemáticas, por los contenidos «Escalas» y «Reconocimiento en los objetos y espacios las proporciones entre el dibujo y la realidad y su representación gráfica utilizando escalas», y el criterio de evaluación BL4.1 «Reproducir y clasificar figuras del entorno (natural, artístico, arquitectónico…) en base a alguna de sus propiedades, con los recursos apropiados (cinta métrica, fotografías, programas de geometría dinámica…), utilizando el vocabulario adecuado, para explicar el mundo que nos rodea», se conocen y se trabajan figuras semejantes, lo que hemos aplicado en la resolución de este problema.

Por tanto, creemos que el problema puede plantearse en 6.º curso de Educación Primaria.

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

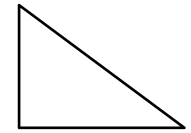
- Datos:
  - El número de pulgadas de una televisión indica la longitud de la diagonal de la pantalla.
  - Una pantalla de TV de 32 pulgadas sabiendo que la proporción entre sus lados es 4:3.

- Incógnitas:
  - Las dimensiones de la pantalla de TV.

B) ¿El problema es resoluble?

Considerando que la pantalla de la TV es un rectángulo, la diagonal forma con los lados un triángulo rectángulo, del que conocemos la hipotenusa, 32 pulgadas, y la proporción entre los lados, 4:3.

Un triángulo rectángulo conocido es el de lados 3, 4 y 5 ($3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$), donde 5 sería la medida de la hipotenusa, y los catetos cumplen la condición de que entre ellos la proporción es 4:3.



Si duplicamos la medida de los lados, el triángulo de lados 6, 8 y 10 también es rectángulo ($6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$), donde 10 sería la medida de la hipotenusa, y la proporción entre los catetos es 8:6 = 4:3, la misma que la que deben tener los de la pantalla de la TV. Esto no es más que una aplicación de la proporcionalidad entre los lados de las figuras semejantes.

Podemos buscar un valor que al multiplicarlo por 5, hipotenusa del triángulo rectángulo inicial, nos de 32, tamaño de la pantalla de la TV. El valor obtenido lo multiplicaremos por los catetos del triángulo rectángulo inicial, 3 y 4, y obtendremos así las dimensiones, en pulgadas, de la pantalla de la TV y la proporción entre los catetos será 4:3.

Vemos que podemos calcular las medidas de la pantalla de la TV, por lo tanto, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Como el ancho y el alto de la pantalla de TV y la diagonal de la misma forman un triángulo rectángulo, que es semejante a un triángulo de lados 3, 4 y 5 pulgadas, calcularemos la razón de semejanza dividiendo la longitud de la diagonal de la pantalla de TV entre el valor de la hipotenusa de dicho triángulo.

b) Multiplicaremos los lados del triángulo de lados 3, 4 y 5 pulgadas por la razón de semejanza calculada en *a*), y por la semejanza de triángulos obtendremos otro triángulo rectángulo de hipotenusa 32 pulgadas.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) 32 : 5 = 6,4.

b) 3 · 6,4 = 19,2 pulgadas; 4 · 6,4 = 25,6 pulgadas.

Comprobamos que el triángulo de lados 19,2 pulgadas, 25,6 pulgadas y 32 pulgadas es rectángulo, y cumple que la proporción entre sus lados es 4:3.

$25{,}6^2 + 19{,}2^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = 1024 = 32^2$.

$$\frac{25{,}6}{19{,}2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} = \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Solución: la pantalla mide 25,6 pulgadas de ancha y 19,2 pulgadas de alta.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

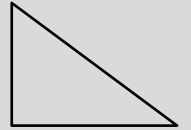
La solución es razonable, pues las dimensiones de los lados de la pantalla de la TV son menores que la dimensión de su diagonal.

B) Comprobar la solución

Aplicamos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos las dimensiones de la pantalla de televisión, 25,6 y 19,2 pulgadas (eran incógnitas y pasan a ser datos en el nuevo problema) y calcularemos la diagonal de la pantalla (era un dato y pasa a ser incógnita en el nuevo problema), es decir, consideramos el problema: «*El tamaño de la pantalla de una televisión se mide, como sabes, en pulgadas. De hecho, el número de pulgadas de una televisión indica la longitud de la diagonal de la pantalla. Así pues, encuentra el tamaño de una TV sabiendo que mide 25,6 pulgadas de ancha y 19,2 pulgadas de alta. ¿Cuál es la proporción entre el ancho y el alto de la pantalla?*». Esperamos que tenga 32 pulgadas de diagonal y que la proporción sea 4:3.

Hacemos los cálculos necesarios:

Conocemos el ancho y el alto de la pantalla de la TV, que lógicamente es rectangular, y la dimensión que queremos calcular es la diagonal de la misma, como vemos en el dibujo, los lados de la TV y su diagonal forman un triángulo rectángulo del que conocemos la medida de los catetos, 25,6 pulgadas y 19,2 pulgadas, y desconocemos la medida de la hipotenusa, que llamaremos «h».



Por el teorema de Pitágoras tenemos: $h^2 = 25{,}6^2 + 19{,}2^2 = 655{,}36 + 368{,}64 = = 1024 \rightarrow h = \sqrt{1024} = 32$, por lo tanto, la TV tiene 32 pulgadas de diagonal, como esperábamos.

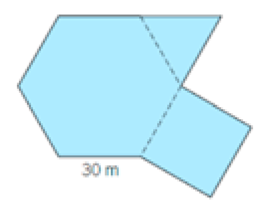
La proporción aentre el ancho y el alto de la pantalla es: $\frac{25{,}6}{19{,}2} = \frac{256}{192} = \frac{128}{96} = = \frac{64}{48} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, luego la relación entre sus lados es 4:3, como esperábamos.

Ambas soluciones son las esperadas, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Problema G.6

Cada una de las 5 alturas de un edificio tiene la planta de esta figura (formada por un hexágono regular, un triángulo equilátero y un cuadrado), siendo el lado del hexágono de 30 m. Si el suelo tiene una moqueta que cuesta 20 €/m^2, calcula el precio total pagado por la moqueta del edificio.



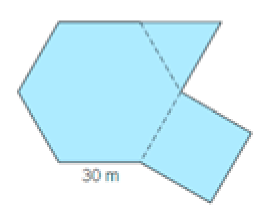
❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - Cada una de las 5 alturas de un edificio tiene la planta de la figura (hexágono regular, triángulo equilátero y un cuadrado).



  - El lado del hexágono mide 30 m.
  - El suelo tiene una moqueta que cuesta 20 €/m^2.
- Incógnitas:
  - El precio total pagado por la moqueta del edificio.

B) ¿El problema es resoluble?

Si podemos conocer la medida de la superficie de la planta del edificio, como sabemos que hay 5 alturas y el precio por metro cuadrado de la moqueta, sabremos el precio total.

Es fácil dibujar con compás, escuadra y cartabón o programas de geometría dinámica, a escala 1:1.000, por tanto 1 mm en el dibujo equivale a 1 m en la realidad, la planta de cada altura del edificio.

Cogemos el compás y con una apertura de 30 mm dibujamos una circunferencia. Ponemos la aguja del compás en cualquier punto de la circunferencia y marcamos en ella dos puntos con el otro extremo del compás, con lo que ya tenemos tres vértices del hexágono regular. Poniendo ahora la aguja del compás en alguno de estos dos últimos puntos marcados, señalamos con el otro extremo del compás un nuevo punto. Así sucesivamente hasta tener marcados seis puntos sobre la circunferencia, que serán los seis vértices del hexágono regular, y que al unirlos obtendremos su contorno.

Para construir el triángulo equilátero, ponemos la aguja del compás en un vértice del hexágono (primer vértice del triángulo) y trazamos un arco exterior al hexágono de abertura 30 mm. Cambiando la aguja del compás a uno de los dos vértices consecutivos (segundo vértice del triángulo), trazamos otro arco que corte al anterior. En el punto de corte tenemos el tercer vértice del triángulo equilátero, y al unir los tres vértices obtendremos su contorno.

En el proceso de dibujar el cuadrado, desde un vértice común al hexágono y al triángulo, y también desde el vértice consecutivo a este en el hexágono y no perteneciente al triángulo, trazamos un segmento, de 30 mm, perpendicular al lado del hexágono. Finalmente, unimos los extremos de estos dos segmentos, con lo que cerramos el contorno del cuadrado.

Una vez dibujada la planta, podemos coger milímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados (de papel, tela…) o plantillas cuadriculadas en milímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados y recubrir toda la superficie. Por lo tanto, podremos medir la superficie de cada planta en milímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados, que transformaremos en metros cuadrados para obtener la medida de la superficie de la planta del edificio.

Luego, el problema es resoluble.

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

a) Para calcular el área del hexágono, como es regular, lo podemos dividir en 6 triángulos equiláteros, además tenemos otro triángulo equilátero igual, componente de la figura de la planta del edificio, por tanto, comenzaremos calculando la altura del triángulo equilátero, que llamaremos «h», utilizando el teorema de Pitágoras.

b) Después, como sabemos la medida de la base de los triángulos, usando la fórmula del área del triángulo calcularemos el área de los triángulos equiláteros, que llamaremos «A_{Tr}».

c) Si multiplicamos por 6 el área anterior obtenemos el área del hexágono regular, que llamaremos «A_H».

d) A continuación, calculamos el área del cuadrado, que llamaremos «A_C».

e) Sumamos las tres áreas obtenidas, con lo que tendremos la medida de la superficie de cada planta, que llamaremos «A_P».

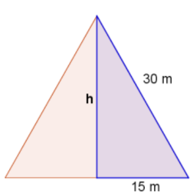
f) Multiplicamos la medida obtenida en el apartado anterior por el número de alturas del edificio, para obtener la medida de la superficie total a enmoquetar, que llamaremos «A_T».

g) Multiplicaremos la medida de la superficie total del edificio por 20 €/m^2, así obtendremos el precio total pagado por la moqueta, que llamaremos «P».

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) $h^2 + 15^2 = 30^2 \rightarrow h^2 = 30^2 - 15^2 = 675\ m^2 \rightarrow h = \sqrt{675}\ m \cong 26\ m$

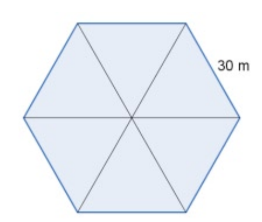


b) Área del triángulo:

$$A_{Tt} = \frac{30 \cdot 26}{2} = 390\ m^2$$

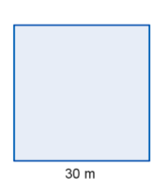
c) Área del hexágono:

$$A_H = 390 \cdot 6 = 2.340\ m^2$$



d) Área del cuadrado:

$$A_C = 30^2 = 900\ m^2$$



e) Área total de la planta:

$$A_P = A_{Tt} + A_H + A_C = 390 + 2.340 + 900 = 3.630\ m^2$$

f) Área de la superfície por enmoquetar del edificio:

$$A_T = 5 \cdot 3.630 = 18.150\ m^2$$

g) Precio total pagado por la moqueta:

$$P = 18.150 \cdot 20 = 363.000\ €$$

Solución: el precio total pagado por la moqueta del edificio es de 363.000 €.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

El precio total de la moqueta viene determinado por la superficie de una planta, el número de plantas y el precio por metro cuadrado de la moqueta. Como el número de plantas y el precio por metro cuadrado de la moqueta están determinados

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

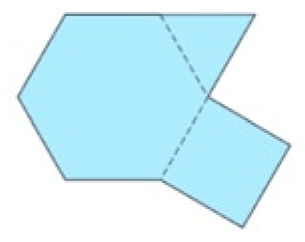
en el enunciado del problema, el único valor a calcular es la medida de la superficie de una planta, entonces, veremos si el valor obtenido en la 3.ª fase es razonable.

Como el hexágono regular de 30 m de lado se puede triangularizar en 6 triángulos equiláteros de 30 m de lado, y la superficie de dicho triángulo equilátero es menor que la de un cuadrado de 30 m de lado, tenemos que: la superficie de la planta del edificio tiene que ser mayor que una superficie formada por 8 triángulos equiláteros de 30 m de lado y menor que una superficie formada por 8 cuadrados de 30 m de lado.

Si pasamos a números, las áreas, el área de la planta del edificio (3.600 m^2) tiene que ser que ser mayor que el área de una superficie formada por 8 triángulos equiláteros de 30 m de lado ($8 \cdot 390$ m^2 = 3.120 m^2) y menor el área de una superficie formada por 8 cuadrados de 30 m de lado ($8 \cdot 900$ m^2 = 7.200 m^2), y lo es. Por lo que creemos que la solución es razonable.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «cambiar datos por incógnita y viceversa», por lo que suponemos que conocemos el precio de enmoquetar todo el edificio y la superficie del cuadrado (eran incógnitas y pasan a ser datos en el nuevo problema) y calcularemos cuánto cuesta el metro cuadrado de moqueta (era dato y ahora pasa a ser la incógnita), con lo que consideramos el siguiente problema: *«Se han pagado 363.000 € por el enmoquetado del edificio. Sabemos que cada una de las 5 alturas del edificio tiene la planta de esta figura (formada por un hexágono regular, un triángulo equilátero y un cuadrado) y que el área del cuadrado es 900 m^2. Calcula el precio por metro cuadrado de la moqueta».* Esperamos que el precio del metro cuadrado de la moqueta sea de 20 €/m^2.



Hacemos simplemente los cálculos:

Primero calculamos la medida del lado del cuadrado, la llamaremos «c», que es también la medida del lado del hexágono $c = \sqrt{900} = 30$ m.

Como en el enunciado del nuevo problema tenemos datos que coinciden con los del problema original, podemos aprovechar cálculos hechos en la 3.ª fase:

- Área del triángulo: $A_{Tr} = 390$ m^2
- Área del hexágono: $A_H = 2.340$ m^2

Calculamos el área de la planta: $A_P = 900 + 390 + 2.340 = 3.630\ m^2$.

Como hay 5 alturas, el área de las 5 plantas del edificio será: $A_T = 3.630 \cdot 5 = 18.150\ m^2$.

Dividimos el precio del enmoquetado entre la superficie total a enmoquetar: 363.000 : 18.150 = 20.

Por tanto, la moqueta valdrá 20 €/m^2; como esperábamos, luego creemos que el problema está bien resuelto

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución es prácticamente igual, ya que los conceptos y contenidos utilizados son propios de los últimos cursos de Educación Primaria y la diferencia podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para hacer la comprobación, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Una vez hecho el dibujo alusivo al enunciado del problema a escala 1:1.000, por ejemplo, mediremos la superficie de una planta mediante milímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados (de papel, tela…) o plantillas cuadriculadas en milímetros cuadrados y/o centímetros cuadrados, obteniendo una medida muy aproximada a 3.630 mm^2, que al «deshacer la escala» son, aproximadamente, los 3.630 m^2 de superficie de una planta.

Multiplicando este valor por el número de plantas, 5, y por el precio del metro cuadrado de moqueta, 20 €/m^2, nos da, aproximadamente, la solución del problema, 363.000 €, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

Problema G.7

Queremos guardar una caña de pescar de 1,85 m de longitud en una caja con forma de ortoedro sin que se salga. Las dimensiones de la caja son 1 m de ancho, 1,5 m de largo y 0,5 m de alto. ¿Es posible hacerlo?

❑ ESTUDIANTADO DEL GRADO EN MAESTRO/A DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.ª FASE: COMPRENDER EL PROBLEMA

Leído y comprendido el enunciado del problema:

A) Datos e incógnitas

- Datos:
  - La longitud de la caña de pescar es 1,85 m.
  - Caja con forma de ortoedro.
  - Las dimensiones de la caja son 1 m de ancho, 1,5 m de largo y 0,5 m de alto.
- Incógnitas:
  - Saber si podemos guardar la caña en la caja sin que se salga.

B) ¿El problema es resoluble?

La distancia más grande posible entre dos puntos de un ortoedro es su diagonal, por tanto, si la caña de pescar mide igual o menos que la diagonal del ortoedro podremos ponerla dentro, entonces, la incógnita real es la longitud de la diagonal del ortoedro.

Con los datos que nos da el problema, podemos construir rectángulos de $1 \times 1,5$ m^2, de $1,5 \times 0,5$ m^2 y de $1 \times 0,5$ m^2 con cartón o madera y ensamblar la caja.

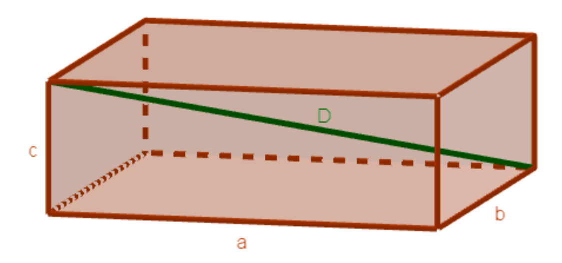
Por otro lado, si no tenemos la caña de pescar a mano, podemos cortar un listón de madera de 1,85 m de longitud y ver si coge en la caja que hemos construido.

Como podemos construir tanto la caja como la caña de pescar, el problema es resoluble.

ISBN: 78-84-17900-59-5

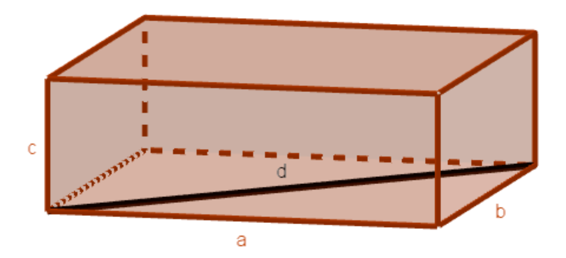
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

2.ª FASE: ELABORAR UN PLAN

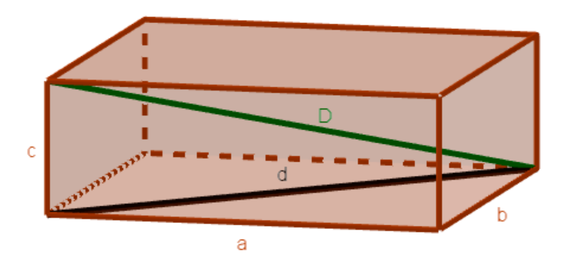


Si llamamos «a» a la longitud del largo del ortoedro, «b» a la longitud del ancho y «c» a la longitud de la altura, tendremos que calcular la medida de la diagonal del ortoedro, la llamaremos «D»:

a) En la base del ortoedro, calcularemos la medida de su diagonal, la llamaremos «d», utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por los lados de la base, de medidas a y b, y su diagonal.



b) Calcularemos la medida de la diagonal del ortoedro, D, utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por la diagonal de la base, de medida d, la altura del ortoedro, de medida c, y la diagonal del ortoedro, de medida D.



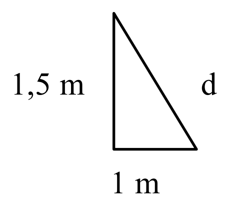
c) Compararemos la longitud de la diagonal del ortoedro con la longitud de la caña de pescar: si la medida de la diagonal, D, es mayor o igual que la longitud de la caña, sí que cabe en la caja. En caso contrario, no.

3.ª FASE: EJECUTAR EL PLAN

a) Los lados de la base miden 1 m y 1,5 m, respectivamente, tenemos, por tanto, el siguiente triángulo rectángulo:

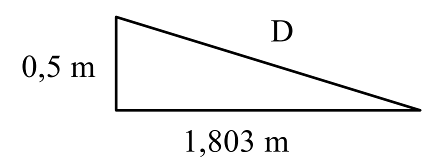
ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171



Utilizando el teorema de Pitágoras: $d^2 = 1^2 + 1{,}5^2 \rightarrow d^2 = 1 + 2{,}25 = 3{,}25 \rightarrow$ $\rightarrow d = \sqrt{3{,}25} = 1{,}803$ m.

b) La diagonal de la base mide 1,803 m, la altura del ortoedro 0,5 m, por tanto, tenemos el siguiente triángulo rectángulo:



Utilizando el teorema de Pitágoras: $D^2 = 0{,}5^2 + 1{,}803^2 \rightarrow D^2 = 0{,}25 + 3{,}25 =$ $= 3{,}5 \rightarrow D = \sqrt{3{,}5} = 1{,}871$ m.

c) Como la longitud de la caña de pescar, 1,85 m, es menor que el valor obtenido para la diagonal de la caja, D = 1,871 m, la caña de pescar sí que cabe en la caja.

Solución: la caña de pescar sí que cabe en la caja.

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

A) ¿La solución es razonable?

Sí, porque las diagonales, d y D, tienen medidas razonables para los triángulos rectángulos de los que forman parte.

B) Comprobar la solución

Como en la 3.ª fase hemos tenido en cuenta todos los datos del problema, para asegurarnos de que la solución es correcta, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, como hemos justificado en la 1.ª fase, *B) ¿El problema es resoluble?*, la incógnita real es la longitud de la diagonal del ortoedro, que calcularemos utilizando la fórmula conocida de la medida de la diagonal (D) de un ortoedro de dimensiones a, b y c: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Esperamos que la diagonal de la caja mida 1,871 m.

Hacemos los cálculos necesarios:

$D^2 = 1^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 = 1 + 2{,}25 + 0{,}25 = 3{,}5 \rightarrow D = \sqrt{3{,}5} = 1{,}871$ m.

Hemos obtenido la misma medida, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

❑ ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La resolución del problema es prácticamente igual que para el estudiantado de Grado en Maestro/a de Educación Primaria, ya que, como hemos justificado en el problema B.3, la utilización del teorema de Pitágoras debe figurar entre los conocimientos del alumnado de 6.º curso de Educación Primaria y la diferencia en la resolución podría ser:

4.ª FASE: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

B) Comprobar la solución

Para hacer la comprobación, aplicaremos el método «resolver el problema de otra manera», en concreto, experimentalmente.

Construida la caja y la caña de pescar alusivas al enunciado del problema, introduciríamos la caña en la caja viendo que coge, por lo tanto, creemos que el problema está bien resuelto.

NOTA: La resolución del problema como alumnado de Educación Primaria podría ser simplemente experimental.

ISBN: 78-84-17900-59-5
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Bibliografía

Abrantes, Paulo et al. 2002. *La resolución de problemas en matemáticas*. Colección Claves para la Innovación Educativa, 12. Barcelona: Graó.

Alcalde, Manuel. 2010. *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la Didáctica de la Matemática en las titulaciones de Maestro en la Universitat Jaume I*. Tesis doctoral. Castelló de la Plana: Universitat Jaume I. http://www.tdx.cat/TDX-0722110-121907.

Alcalde, Manuel et al. 2013. «Algunas reflexiones sobre la didáctica de la Resolución de Problemas Matemáticos». XVI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), Palma de Mallorca, julio 2013.

Alcalde, Manuel, Inmaculada C. Pérez y Gil Lorenzo. 2014. *Los números naturales en el Aula de Primaria*. Col·lecció Sapientia, núm. 90. Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I. http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia90.

Alsina, Àngel. 2006. «¿Para qué sirven los problemas en la clase de matemáticas?» *Uno* [Versión electrónica], 43.

Alsina, Claudi et al. 1996. *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Ausubel, David Paul. 1968. *Educational Psychology. A Cognitive View* (1.ª ed.). Nueva York: Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast.: Roberto Helier. 1976. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (1.ª ed.). México: Trillas).

Ausubel, David Paul, Joseph D. Novak and Helen Hanesian. 1978. *Educational Psychology. A Cognitive View* (2.ª ed.). Nueva York: Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast.: Mario Sandoval. 1983. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2.ª ed.; 4.ª reimpr., 1990). México: Trillas).

Canals, Maria Antònia. 2010. *Problemes i més problemes*. Col·lecció Els Dossiers de Maria Antònia Canals, 107. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.

Carrillo, José. 1998. «La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué». *Epsilon*, 40: 21-25.

Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Josep Gascón. 1997. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Dewey, John. 1910. *How we think*. Boston (USA): D. C. Heath and Company.

García Granell, Montserrat. 2017. *Anàlisi del mètode de Polya per a la resolució de problemes als llibres de text de matemàtiques de Primària* (trabajo final de grado). Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.

García Jiménez, Juan Emilio. 2002. «Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas». En *La resolución de problemas en matemáticas.*

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171

Teoría y experiencias, Paulo Abrantes et al. Barcelona: Ed. Laboratorio Educativo-Graó.

Generalitat Valenciana. 2014. Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el cual establece el currículum y despliega la ordenación general de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana, núm. 7311, 7 de julio de 2014.

Generalitat Valenciana. 2015. Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el cual establece el currículum y despliega la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunitat Valenciana. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana, núm. 7544, 10 de junio de 2015.

Halmos, Paul Richard. 1980. «The Heart of Mathematics». *American Mathematical Monthly*, 87, 7, 1.980: 519-24.

Kilpatrick, Jeremy. 1985. «A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem-solving». En *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Multiples Research Perspectives*, ed. Edward A. Silver. Hillsdale (New Jersey, EE. UU.): Lawrence Erlbaum Associates.

Lorenzo, Gil, Manuel Alcalde y Inmaculada C. Pérez. 2015. *La geometría y la estadística en el aula de primaria*. Col·lecció Sapientia, núm. 109. Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I. http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109.

Mason, John, Leone Burton and Kaye Stacey. 1982: *Thinking Mathematically*. Massachusetts (EE. UU.): Addison-Wesley.

Montero, Jesús *et al*. 2018. «Destrezas de modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria». *Suma*, 87: 31-40.

National Council of Teachers of Mathematics. 2000. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia (EE. UU.): National Council of Teachers of Mathematics. (Trad. cast.: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. 2003. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales).

Orton, Anthony. 1988. *Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom Practice*. London: Cassell. (Trad. cast.: Solana, Guillermo. 1990. *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia y Ed. Morata S. A.).

Perales, Francisco Javier 2000. *Resolución de problemas*. Madrid: Síntesis S.A.

Pérez, Inmaculada C., Manuel Alcalde y Gil Lorenzo. 2012. «La Formación Inicial de los Maestros de Educación Infantil. Una aproximación desde la realidad en Didáctica de las Matemáticas». XII Congreso Internacional de Formación del Profesorado (AUFOP 2012): La Educación como Elemento de Transformación Social. 22-24 noviembre 2012, Valladolid (España).

Pérez, Inmaculada C. Manuel Alcalde y Gil Lorenzo. 2014. *Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria*. Col·lecció Sapientia, núm. 97. Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I. http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia97.

Polya, George. 1945. *How to solve it*. Princenton: Princeton University Press, Oxford (RU). (Traducció espanyola: Polya, George. 1965, reimpreso 2010. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, D. F. (México): Trillas).

Puig, Luis. 1996. *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, Luis, Fernando Cerdán. 1988. *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis, S. A.

Sánchez Mendías, Javier, Isidoro Segovia y Antonio Miñán. 2011. «Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de Educación Primaria». *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, vol. 15, n.º 3, diciembre 2011: 297-311.

Schoenfeld, Alan. 1985. «*Mathematical problem solving*». Nueva York (EE. UU.): Academic Press.

Skemp, Richard R. 1971. *The Psychology of Learning Mathematics* (1.ª ed., reimp. 1977). Londres: Penguin Books Ltd. (Trad. cast.: Gonzalo Gonzalvo. 1980. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata S. A.).

Sobrino, Marta. 2016. *La resolución de problemas en tercero y cuarto curso de Educación Primaria según el método de Polya* (trabajo final de grado). Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.

Traver, Cristian. 2015. *Estudi de la resolució de problemes pel mètode de Polya en Educació Primària* (trabajo final de grado). Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.

WEBSTER'S. 1979. *New universal unabridged dictionary*. 2nd ed. Nueva York: Simon & Schuster.

ISBN: 78-84-17900-59-5

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia171